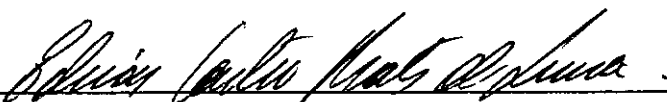


INTEGRAÇÃO DIRETA DA RESPOSTA EM REGIME PERMANENTE PELO  
MÉTODO DE RITZ-WILSON COM MUDANÇA DE BASE

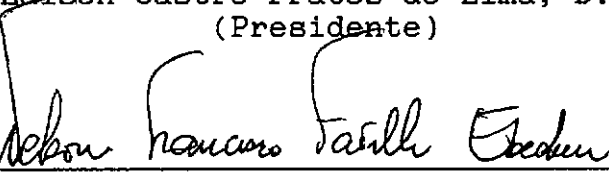
*Paulo Mauricio Videiro*

TESE SUBMETIDA AO CORPO DOCENTE DA COORDENAÇÃO DOS PROGRAMAS  
DE PÓS-GRADUAÇÃO DE ENGENHARIA DA UNIVERSIDADE FEDERAL DO  
RIO DE JANEIRO COMO PARTE DOS REQUISITOS NECESSÁRIOS PARA A  
OBTENÇÃO DO GRAU DE MESTRE EM CIÊNCIAS EM ENGENHARIA CIVIL.

Aprovada por :



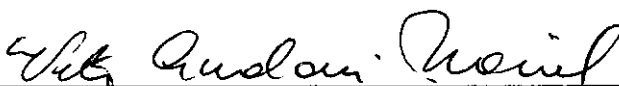
Edison Castro Prates de Lima, D.Sc.  
(Presidente)



Nelson Francisco Favilla Ebecken, D.Sc.



Alvaro Luiz G. A. Coutinho, D.Sc.



Vitor Giordani Maciel, M.Sc.

RIO DE JANEIRO, RJ - BRASIL

MARÇO DE 1990

VIDEIRO, PAULO MAURICIO

Integração Direta da Resposta do Regime  
Permanente pelo Método de Ritz-Wilson com  
Mudança de Base [Rio de Janeiro] 1990

IX, 128p. 29,7 cm (COPPE/UFRJ, M.Sc., Enge-  
nharia Civil, 1990)

Tese - Universidade Federal do Rio de  
Janeiro, COPPE

1. Ritz-Wilson 2. Regime Permanente

3. Mudança de Base I. COPPE/UFRJ

II. Título (série).



## AGRADECIMENTOS

Ao Professor Edison Castro Prates de Lima pela orientação, apoio, incentivo e paciência com que esperou, por um longo tempo, a minha decisão de iniciar o trabalho de pesquisa que resultou nesta tese.

A minha esposa Bárbara pelo carinho e apoio destes últimos meses, fundamentais para a realização deste trabalho.

Aos meus pais.

Ao amigo Cláudio Bittencourt Ferreira pela colaboração prestada na revisão dos originais.

Resumo da Tese apresentada à COPPE/UFRJ como parte dos requisitos necessários para a obtenção do grau de Mestre em Ciências (M.Sc.).

## INTEGRAÇÃO DIRETA DA RESPOSTA DO REGIME PERMANENTE PELO MÉTODO DE RITZ-WILSON COM MUDANÇA DE BASE

*Paulo Mauricio Videiro*

Março de 1990

Orientador : Prof. Edison Castro Prates de Lima

Programa : Engenharia Civil

Inicialmente é apresentado um procedimento para a obtenção da resposta em regime permanente a partir da resposta transiente para um ciclo de excitação. A resposta transiente é calculada pelo método da superposição de vetores de Ritz-Wilson. Também são apresentados procedimentos baseados na mudança de base que possibilitam a utilização do método de Ritz-Wilson no cálculo da resposta dinâmica devida a carregamentos genéricos. O objetivo final do trabalho é a utilização conjunta dos procedimentos apresentados na análise dinâmica de sistemas estruturais sujeitos a carregamentos periódicos genéricos. Exemplos numéricos são apresentados e comentados ao final do trabalho.

Abstract of Thesis presented to COPPE/UFRJ as partial fulfillment of the requirements for the degree of Master of Science (M.Sc.).

**DIRECT INTEGRATION OF THE STEADY-STATE RESPONSE USING THE  
RITZ-WILSON METHOD WITH BASIS CHANGE**

*Paulo Mauricio Videiro*

March, 1990

Thesis Supervisor : Prof. Edison Castro Prates de Lima  
Department : Civil Engineering

A procedure is presented in which the steady-state response of a structural system to a periodic excitation is computed from the transient response to a single cycle of the excitation. The superposition of Ritz-Wilson vectors is used for the transient response solution. Basis change approaches are also presented to allow the application of the Ritz-Wilson method in the solution of dynamic response due to generic load cases. The final purpose of this work is the use of both procedures in the dynamic analysis of structural systems subjected to generalized periodic excitations. Some basic ideas of the classical mode superposition method as well as the Lanczos method are briefly reviewed and a set of numerical examples are presented and discussed.

## ÍNDICE

<b>Capítulo I - INTRODUÇÃO .....</b>	<b>1</b>
 <b>Capítulo II - SUPERPOSIÇÃO MODAL</b>	
II.1 - Introdução .....	6
II.2 - Superposição Modal Clássica .....	8
II.3 - Resposta no Domínio do Tempo .....	9
II.4 - Correção Estática .....	12
II.5 - Fator de Participação de Carga ....	15
II.6 - Comentários .....	16
 <b>Capítulo III - O MÉTODO DE RITZ-WILSON</b>	
III.1 - Introdução .....	17
III.2 - Fundamentos do Método .....	19
III.3 - Determinação do Número de Vetores da Base .....	24
III.4 - Implementação Numérica .....	25
III.5 - Cálculo da Resposta Dinâmica .....	29
III.6 - Qualidade da Resposta .....	30
 <b>Capítulo IV - O MÉTODO DE LANCZOS .....</b>	<b>37</b>

**Capítulo V - RESPOSTA EM REGIME PERMANENTE**

V.1 - Introdução .....	42
V.2 - Procedimento para o Cálculo da Resposta Permanente .....	44
V.3 - Comentários .....	47

**Capítulo VI - MUDANÇA DE BASE**

VI.1 - Introdução .....	49
VI.2 - Geração das Bases .....	50
VI.3 - Resposta no Domínio do Tempo .....	55
VI.4 - Resposta em Regime Permanente .....	57
VI.5 - Comentários .....	61

**Capítulo VII - ENRIQUECIMENTO DA BASE**

VII.1 - Introdução .....	63
VII.2 - Procedimento de Análise .....	64
VII.3 - Modificação da Base Inicial .....	66
VII.4 - Comentários .....	69

**Capítulo VIII - APLICAÇÕES NUMÉRICAS**

VIII.1 - Introdução .....	70
VIII.2 - Exemplo <i>SERRA</i> .....	71
VIII.3 - Modelo <i>JAQUETA</i> .....	74
VIII.4 - Exemplo <i>JAQSEN</i> .....	77



VIII.5 - Exemplo <i>JAQSER</i> .....	84
VIII.6 - Exemplo <i>JAQDEF</i> .....	89
VIII.7 - Exemplo <i>JAQMUD</i> .....	96
VIII.8 - Exemplo <i>MUDEBAS</i> .....	101
VIII.9 - Exemplo <i>MUDEBA2</i> .....	113

<b>Capítulo IX - CONCLUSÕES</b> .....	121
---------------------------------------	-----

<b>REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS</b> .....	125
---	-----

## Capítulo I

### INTRODUÇÃO

A análise de grandes sistemas estruturais submetidos a cargas variáveis no tempo é uma necessidade corrente na engenharia estrutural. Estruturas marítimas destinadas ao suporte de facilidades para prospecção e exploração de petróleo, submetidas a cargas ambientais, como estados de mar e vento, são exemplos de problemas de grande porte, que demandam precisão não só na solução das respostas globais máximas como também na determinação de efeitos localizados tais como a variação das tensões em juntas tubulares, a fim de permitir uma correta avaliação da vida útil da estrutura e dos danos causados por fadiga.

A primeira etapa destas análises consiste na elaboração de um modelo discretizado da estrutura utilizando um procedimento apropriado de discretização, tal como o método dos elementos finitos. As equações de movimento podem então ser estabelecidas e solucionadas utilizando-se uma das várias estratégias disponíveis.

O método de superposição modal é uma estratégia comumente utilizada que possibilita, através da aplicação de uma adequada transformação de coordenadas, a redução do número de equações que governam o problema, que normalmente podem

atingir centenas ou milhares de graus de liberdade. A principal e mais trabalhosa tarefa da análise passa a ser então a determinação da base que será utilizada para a transformação de coordenadas e redução do problema. Esta base tem sido tradicionalmente constituída pelos primeiros modos de vibração da estrutura e demanda, desta forma, a solução de um problema de autovalor de grande porte.

Um novo método, semelhante à superposição modal clássica, foi proposto por WILSON *et al.* [1], onde a base para a transformação das equações do problema original em um sistema de coordenadas generalizadas de Ritz é gerada a partir da distribuição espacial do carregamento dinâmico, suposto da forma :

$$\{p(t)\} = \{f(s)\}.g(t) \quad (I.1)$$

onde  $t$  é o tempo,  $s$  são coordenadas espaciais,  $\{p(t)\}$  é o vetor de cargas dinâmicas,  $\{f(s)\}$  é um vetor de amplitudes constantes no tempo, contendo o perfil espacial da carga ao longo da estrutura, e  $g(t)$  é uma função temporal qualquer.

A obtenção de uma base de transformação apropriada pelo método de Ritz-Wilson requer um trabalho numérico muito inferior ao necessário para a obtenção dos primeiros modos de vibração, fato que associado a outras vantagens inerentes ao novo método, que são enumeradas no texto deste trabalho, torna-o mais eficiente e atrativo que o

método clássico de superposição modal.

A possibilidade da aplicação extensiva do método de Ritz-Wilson fica entretanto limitada, nos casos práticos, pela condição que o carregamento imposto à estrutura atenda à forma genérica estabelecida na equação (I.1). A existência de não linearidades localizadas na estrutura, que poderiam ser tratadas pelo método das pseudo-forças, pode vir a prejudicar, também, a obtenção de uma base de transformação adequada para todo intervalo da análise. Um exemplo de não linearidade deste tipo ocorre no tratamento da interação solo-estrutura na análise de estruturas do tipo jaqueta.

Um dos objetivos deste trabalho é a proposição de metodologias que permitam contornar esta restrição na utilização do método de Ritz-Wilson. A primeira estratégia apresentada consiste na utilização de diversas bases de transformação, cada uma pertinente e adequada a um determinado intervalo de tempo da análise e gerada a partir do carregamento atuante no instante definido como característico para a sua faixa de atuação. A resposta dinâmica é obtida pela integração das equações modais no domínio do tempo, sendo que, nos instantes de mudança de base, é efetuada a projeção das respostas modais entre os subespaços definidos por cada uma das bases utilizadas na análise.

A segunda metodologia proposta consiste na realização de

sucessivas análises com o emprego de uma única base de Ritz-Wilson para todo o período da análise. A cada nova análise a base é submetida a um enriquecimento através da incorporação de um novo vetor de Ritz-Wilson, visando, desta forma, a melhoria da representação tanto do carregamento como da resposta dinâmica. O segundo procedimento proposto mostrou-se mais eficiente no tratamento de carregamentos defasados, como os que ocorrem em análises dinâmicas de estruturas sujeitas a ação de estados de mar.

Um segundo objetivo é o emprego do procedimento proposto recentemente por VELETSOS e KUMAR [2], destinado à integração direta da resposta em regime permanente, em análises dinâmicas realizadas pelo método da superposição dos vetores de Ritz-Wilson. A metodologia de VELETSOS propõe a adição de uma correção à resposta transiente de um ciclo de excitação e é formulada a partir de condições de contorno que garantam a igualdade dos estados de movimentos nos instantes inicial e final de um ciclo de excitação típico, propriedade que caracteriza a resposta em regime permanente.

O emprego concomitante das metodologias propostas, a utilização da mudança de base e a integração direta da resposta em regime permanente, com a utilização do método de Ritz-Wilson para a análise dinâmica de estruturas sujeitas a carregamentos periódicos não harmônicos, é o objetivo final deste trabalho.

O texto deste trabalho está organizado em capítulos, sendo que o subsequente a este introdutório traz um resumo da superposição modal clássica. O capítulo III descreve o método de Ritz-Wilson e apresenta dispositivos que permitam a avaliação da qualidade da resposta obtida neste método. O capítulo IV, com o propósito ilustrativo, apresenta o método de Lanczos-Ritz, que é uma variante do método de Ritz-Wilson e onde as propostas apresentadas neste trabalho também são aplicáveis. O capítulo V apresenta a metodologia de integração direta da resposta em regime permanente, proposta por VELETOS e KUMAR [2]. Os capítulos VI e VII tratam da resposta dinâmica obtida com a utilização dos procedimentos de mudança e de enriquecimento da base formada pelos vetores de Ritz-Wilson. No capítulo VIII são apresentados diversos exemplos numéricos, demonstrando a aplicabilidade das propostas e conceitos apresentados e, finalmente, o capítulo IX traz as conclusões e as sugestões para o desenvolvimento dos métodos de análise dinâmica correlatos ao algoritmo de Ritz-Wilson.

## Capítulo II

### SUPERPOSIÇÃO MODAL

#### II.1 Introdução

A equação de equilíbrio dinâmico para uma estrutura discretizada pelo método dos elementos finitos pode ser escrita em função dos seus deslocamentos nodais  $\{u\}$ , como:

$$[M]\{\ddot{u}\} + [C]\{\dot{u}\} + [K]\{u\} = \{p(t)\} \quad (\text{II.1})$$

onde  $[M]$ ,  $[C]$  e  $[K]$  são, respectivamente, as matrizes de massa, amortecimento viscoso e rigidez, todas quadradas e de ordem  $n$ , sendo  $n$  o número de graus de liberdade do modelo estrutural e  $\{\ddot{u}\}$ ,  $\{\dot{u}\}$  e  $\{u\}$  são, respectivamente, os vetores de acelerações, velocidades e deslocamentos nodais e  $\{p(t)\}$  é o vetor das cargas aplicadas à estrutura. Todos os vetores e matrizes são de ordem  $n$ , e os pontos representam diferenciação em relação ao tempo.

A equação (II.1) pode ter sua ordem reduzida considerando-se a seguinte transformação de coordenadas, onde  $\{u\}$  é expresso por uma combinação linear de  $r$  vetores de Ritz linearmente independentes, sendo  $r < n$  :

$$\{u\} = [\Phi]\{x\} \quad (\text{II.2})$$

onde  $\{x\}$  é o vetor dos deslocamentos em coordenadas generalizadas, de ordem  $r$ , e  $[\Phi]_{n \times r}$  é a matriz onde cada coluna é um dos vetores linearmente independentes utilizados na transformação. A qualidade da resposta  $\{u\}$  está diretamente ligada à capacidade da base de transformação  $[\Phi]$  escolhida representar, de forma adequada, as diversas propriedades do problema dinâmico.

Aplicando-se a transformação (II.2) na equação (II.1) e pré-multiplicando os dois membros da equação por  $[\Phi]^T$ , obtemos:

$$[M^*]\{\ddot{x}\} + [C^*]\{\dot{x}\} + [K^*]\{x\} = \{p^*\} \quad (\text{II.3})$$

onde as matrizes de massa, amortecimento e rigidez e o vetor de cargas aplicadas, em coordenadas generalizadas, são definidos por :

$$[M^*] = [\Phi]^T[M][\Phi] \quad (\text{II.4})$$

$$[C^*] = [\Phi]^T[C][\Phi]$$

$$[K^*] = [\Phi]^T[K][\Phi]$$

$$\{p^*\} = [\Phi]^T\{p\}$$

Escolhendo-se a base  $[\Phi]$  de forma adequada pode-se reduzir a largura de banda ou mesmo desacoplar as  $r$  equações em (II.3), que poderão então ser resolvidas por algoritmos disponíveis. A determinação da resposta dinâmica do sistema a partir da resposta modal pode, então, ser obtida com o emprego da expressão (II.2).



## II.2 Superposição Modal Clássica

O método de superposição modal clássico utiliza, como base de transformação de coordenadas, os  $r$  primeiros modos de vibração do problema de autovalor não amortecido associado à equação (II.1) :

$$[K][\Phi] = [M][\Phi][\Lambda] \quad (\text{II.5})$$

onde  $[\Lambda]$  é uma matriz diagonal quadrada, de ordem  $r$ , que contém o quadrado das primeiras  $r$  frequências naturais do modelo estrutural. O problema de autovalor expresso em (II.5) pode ser resolvido utilizando o método de iteração por subespaço, proposto por WILSON e apresentado por BATHE em [3].

As matrizes modais expressas em (II.4) ficam reduzidas as seguintes matrizes diagonais de ordem  $r$  :

$$[M^*] = [\Phi]^T[M][\Phi] = [I] \quad (\text{II.6})$$

$$[C^*] = [\Phi]^T[C][\Phi] = [\theta]$$

$$[K^*] = [\Phi]^T[K][\Phi] = [\Lambda]$$

onde  $[I]$  é a matriz identidade e  $[\theta]$  é uma matriz diagonal cujos coeficientes são definidos por :

$$\theta_1 = 2.\omega_1.\xi_1 \quad (\text{II.7})$$

sendo  $\omega_i$  as frequências naturais não amortecidas do sistema estrutural e  $\xi_i$  as porcentagens de amortecimento crítico associadas a cada modo de vibração  $i$ .

A equação (II.3) pode ser expressa por :

$$\{\ddot{x}\} + [\Theta]\{\dot{x}\} + [A]\{x\} = [\Phi]^T\{p\} \quad (II.8)$$

As equações desacopladas (II.8) podem ser facilmente resolvidas tanto no domínio da frequência como no domínio do tempo.

### II.3 Resposta no Domínio do Tempo

Quando a variação no tempo do carregamento :

$$\{p^*\} = [\Phi]^T\{p(t)\}$$

puder ser representada, ou aproximada, por uma função composta por segmentos de retas, o que abrange grande parte dos casos de carga correntes em análises estruturais, a integração das equações desacopladas em (II.8) pode ser obtida de forma exata seguindo o procedimento proposto por WILSON [4] e descrito de forma sumária neste item.

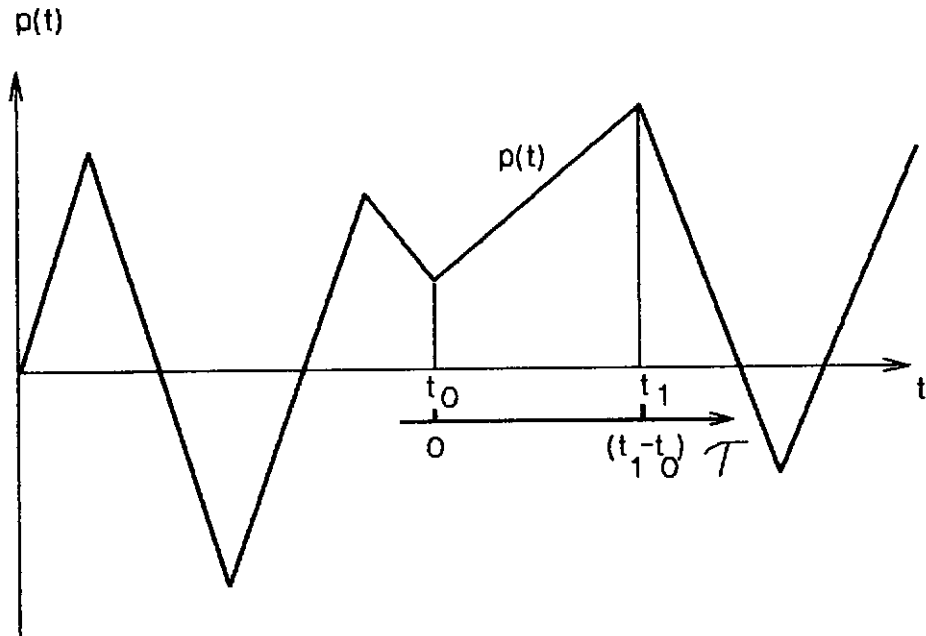


Figura II.1 Carga discretizada por segmentos de retas

Supondo que o carregamento possa ser discretizado conforme é mostrado na figura II.1, temos para cada segmento de reta que :

$$p_1(\tau) = a + b \cdot \tau \quad (\text{II.9})$$

sendo :

$$a = p_1(t_0)$$

$$b = \frac{(p_1(t_1) - p_1(t_0))}{t_1 - t_0}$$

onde  $p_1$  representa cada elemento do vetor  $\{p^*\}$  e  $\tau$  é um

sistema auxiliar para a integração de cada segmento de reta, cuja a origem coincide com a do segmento, vide a figura II.1.

A resposta modal é expressa por :

$$\{x(\tau)\} = \{x_p(\tau)\} + \{x_h(\tau)\} \quad (\text{II.10})$$

onde a solução particular  $\{x_p\}$  é dada pela seguinte expressão :

$$x_{p1} = A_0 + A_1 \cdot \tau \quad (\text{II.11})$$

$$A_0 = \frac{a}{w_1^2} - \frac{2 \cdot \xi_1 \cdot b}{w_1^3}$$

$$A_1 = \frac{b}{w_1^2}$$

e a solução homogênea, considerando-se um sistema sub-amortecido,  $\xi_1 < 1$ , é expressa por :

$$x_{h1} = (A_2 \cdot \cos(\hat{w}_1 \cdot \tau) + A_3 \cdot \text{sen}(\hat{w}_1 \cdot \tau)) \cdot e^{-\xi_1 \cdot w_1 \cdot \tau}$$

$$A_2 = x_1(t_0) - A_0 \quad (\text{II.12})$$

$$A_3 = \frac{\dot{x}_1(t_0) + \xi_1 \cdot w_1 \cdot A_2 - A_1}{\hat{w}_1}$$

onde  $\hat{w} = w \sqrt{1 - \xi^2}$  é a frequência amortecida para cada modo e  $x_{p1}$  e  $x_{h1}$  representam, respectivamente, os

elementos dos vetores  $\{x_p\}$  e  $\{x_h\}$ . Diferenciando-se  $\{x(t)\}$  em relação ao tempo obtemos  $\{\dot{x}(t)\}$  e  $\{\ddot{x}(t)\}$ , que são as velocidades e as acelerações modais, respectivamente.

O procedimento de integração consiste em dados os deslocamentos e velocidades modais no instante inicial de análise, calcular as respostas para o instante seguinte utilizando-se as expressões acima, que por sua vez serão as condições iniciais para o próximo instante de integração e assim sucessivamente até o instante final desejado.

## II.4 Correção Estática

Um problema normalmente posto aos projetistas é a determinação das tensões localizadas em elementos estruturais. Isto ocorre, por exemplo, na avaliação da vida útil das juntas tubulares sujeitas à fadiga ou na verificação de tensões em membros secundários em estruturas do tipo jaqueta.

Estes efeitos localizados normalmente estão relacionados com os modos de vibração de alta frequência, que não são considerados na determinação da base de transformação de coordenadas para redução modal.

A parcela da resposta dinâmica devida a estes modos superiores fica, portanto, truncada da resposta obtida a partir da integração das equações modais geradas com a base formada pelos modos de frequências inferiores. Analogamente, se o carregamento dinâmico imposto à estrutura contiver componentes expressas pelos modos de alta frequência, estas componentes serão truncadas da análise modal, haja visto que a carga modal é definida por :

$$\{p^*(t)\} = [\Phi]^T \{p(t)\} \quad (II.13)$$

Pela expressão anterior, a carga modal  $\{p^*(t)\}$  será insignificante se a distribuição espacial de  $\{p(t)\}$  contiver grau significativo de ortogonalidade com  $[\Phi]$  ou, em outras palavras, contiver componentes significativas dos modos de alta frequência, não considerados na base de transformação.

Portanto é necessário introduzir uma correção na resposta obtida pela solução das equações modais. Esta correção pode ser estabelecida se levarmos em conta que a resposta oferecida pela estrutura correspondente aos modos de alta frequência é de natureza eminentemente elástica. Isto sugere que a resposta às componentes da carga referentes aos modos de alta frequência pode ser equacionada como um problema estático. Para o cálculo da parcela de carga que foi truncada da redução modal, partindo da equação (II.13) e considerando que  $[\Phi]^T [M] [\Phi] = [I]$ , sendo  $[I]$  a matriz

identidade de ordem  $r$ , temos :

$$[\Phi]^T[M][\Phi]\{p^*\} = [\Phi]^T\{p\} \quad (\text{II.14})$$

ou

$$\{pr\} = [M][\Phi]\{p^*\}$$

onde  $\{pr\}$  é o vetor de ordem  $n$  que contém a parcela de carga representada por  $\{p^*\}$ . Devemos notar que  $\{pr\}$  só será igual a  $\{p\}$  se a base  $[\Phi]$  expandir todo o espaço  $n$ -dimensional de  $\{p\}$ , o que não ocorre, já que  $r < n$ .

Finalmente a resposta  $\{u\}$  pode ser expressa como :

$$\{u\} = \{ur\} + \{us\} \quad (\text{II.15})$$

$$\{ur\} = [\Phi]\{x\}$$

$$\{us\} = [K]^{-1}\{ps\}$$

sendo

$$\{ps\} = \{p\} - \{pr\}$$

onde  $\{ur\}$  é a resposta obtida pela integração das equações modais e  $\{us\}$  é a resposta obtida na correção estática necessária para a consideração dos efeitos decorrentes da presença das componentes dos modos de frequências superiores no vetor de cargas aplicadas ao sistema estrutural.

## II.5 Fator de Participação de Carga

Os fatores de participação da carga definem quantitativamente a parcela do carregamento dinâmico que está sendo representada em cada equação modal. Eles são definidos a partir da igualdade (II.14), que pode ser reescrita, para cada equação modal, como :

$$\{p_i\} = [M]\{\phi_i\} \cdot *p_i \quad (\text{II.16})$$

$$*p_i = \{\phi_i\}^T \{p(t)\}$$

onde  $*p_i$  é a carga da  $i$ -ésima equação modal e  $\{p_i\}$  o vetor que contém a parcela da carga dinâmica representada por  $*p_i$ . A partir de (II.16) podemos estabelecer o seguinte fator adimensional :

$$\mu_i = \frac{\{p\}^T \{p_i\}}{\{p\}^T \{p\}} \quad (\text{II.17})$$

onde  $\mu_i$  é o fator de participação da carga da equação  $i$ , que pode variar de 0 a 1. Um fator igual a zero representa que o autovetor  $\{\phi_i\}$  é completamente ortogonal à  $\{p\}$ .

O erro na representação da carga pela base de transformação é definido pela expressão :



$$E_p = 1 - \sum_{i=1}^r \mu_i \quad (\text{II.18})$$

A determinação de  $E_p$ , naturalmente, só é possível após a solução do problema de autovalor, quando são conhecidos os modos de vibração que compõem a base do subespaço onde será projetado o problema dinâmico.

## II.6 Comentários

A superposição modal clássica, como exposta acima, tem sido extensivamente usada na obtenção da resposta dinâmica em análise de grandes sistemas estruturais. Existem inúmeros algoritmos e pacotes de programas computacionais destinados à análise estrutural tanto de sistemas lineares como de sistemas não lineares, tratados pelo método das pseudo-forças, que utilizam os conceitos expostos.

## Capítulo III

### O MÉTODO DE RITZ-WILSON

#### III.1 Introdução

Um novo método para análise dinâmica de sistemas estruturais sujeitos a carregamentos com distribuição espacial fixa foi proposto por WILSON *et al.* [1] como uma alternativa mais eficiente do que a estratégia de superposição modal clássica. A base para a transformação de coordenadas no novo método consiste de um conjunto de vetores que são gerados a partir da distribuição espacial fixa do carregamento dinâmico, que é definido de forma genérica pela expressão (I.1) :

$$\{p(t)\} = \{f(s)\}.g(t) \quad \text{(III.1)}$$

onde  $\{p(t)\}$  é o vetor de cargas dinâmicas aplicadas à estrutura,  $\{f(s)\}$  é um vetor de amplitudes que fixa a distribuição espacial do carregamento e  $g(t)$  é uma função temporal qualquer.

O método de Ritz-Wilson tem sido utilizado por diversos autores [5-8] na construção de algoritmos para a transformação de coordenadas, tendo sido demonstrada a sua supremacia sobre o procedimento clássico.

As principais vantagens na utilização do novo método são :

- A base de transformação de coordenadas, gerada a partir do próprio carregamento dinâmico, contém implicitamente as componentes dos modos de mais alta freqüência do sistema estrutural, não sendo necessário, portanto, a correção estática da resposta obtida, conforme é efetuado no método clássico.
- Os vetores gerados serão pertinentes à direção do carregamento, não ocorrendo vetores ortogonais ou com pequeno fator de participação de carga, que não contribuem para a resposta dinâmica e que comumente aparecem no método tradicional.
- É possível avaliar o número de vetores necessários para a obtenção de uma boa representação da carga dinâmica durante o processo de geração da base de transformação. No método clássico tal avaliação só pode ser efetuada ao final do procedimento para cálculo dos primeiros autovetores.
- O trabalho numérico necessário para a geração da base de transformação de coordenadas empregada no método de Ritz-Wilson é muito inferior ao necessário para a extração dos primeiros modos de vibração do problema de autovalor definido em (II.5).
- A utilização dos vetores de Ritz-Wilson na subestru-

turação da análise dinâmica de sistemas estruturais de grande porte produz respostas dinâmicas confiáveis, pois os vetores gerados incorporam características do carregamento dinâmico e asseguram que não ocorrem truncamentos decorrentes dos modos superiores. É possível, portanto, a utilização da subestruturação para análise estrutural pelo método da síntese de componentes modais não só para a avaliação das frequências próprias como também para a obtenção de respostas dinâmicas [9 e 10].

### III.2 Fundamentos do Método

O procedimento de geração está intimamente relacionado com os métodos de interação inversa para o cálculo de um único par de autovalor e modo de vibração na solução de um problema de autovalor. Dado um par de matrizes  $[K]$  e  $[M]$  e um vetor de partida  $\{q\}$ , estes métodos geram a seqüência de vetores de Krylov, definida por :

$$[\{q\}, [K]^{-1}[M]\{q\}, ([K]^{-1}[M])^2\{q\}, \dots, ([K]^{-1}[M])^r\{q\}].$$

Esta seqüência converge, após  $r$  iterações, para o autovetor correspondente ao menor autovalor em magnitude do problema de autovalor definido por  $([K] - \lambda[M])\{\phi\} = 0$ .

São duas as peculiaridades do método de Ritz-Wilson em relação à seqüência de Krylov. A primeira é o emprego dos

sucessivos vetores da seqüência ortogonalizando cada um deles em relação aos precedentes, utilizando o procedimento de Gram-Schmidt, ao invés de aproveitar apenas o último vetor da seqüência, após alcançada a convergência. O resultado é um conjunto de vetores  $[M]$ -ortonormalizados, que é utilizado numa transformação de coordenadas para redução da dimensão do problema dinâmico.

Deve-se ressaltar a importância do procedimento empregado para a ortogonalização dos sucessivos vetores da seqüência de Krylov [6], já que estes perdem a sua ortogonalidade rapidamente em aritmética finita. Existem várias estratégias propostas, tais como :

- ortogonalização total de cada vetor em relação a todos os vetores anteriores da seqüência,
- ortogonalização de cada vetor somente em relação aos dois imediatamente anteriores ,
- ortogonalização seletiva [11] ou
- reortogonalização parcial [12].

As estratégias de ortogonalização parcial visam à economia de operações numéricas nos processos de geração de um número grande de vetores. Para os problemas de análise estrutural comumente encontrados, a base para transformação de coordenadas é formada por um número reduzido de vetores. Nestes casos, pela sua simplicidade e segurança, deve-se adotar o esquema de ortogonalização total, que é o empregado no algoritmo implementado neste

trabalho.

A segunda peculiaridade é em relação ao vetor de partida  $\{q\}$ . Nos métodos de interação inversa, que utilizam a seqüência de Krylov, o vetor de partida pode ser escolhido de forma arbitrária. A conseqüência resultante entre a escolha de dois vetores diferentes, naquele processo, é um maior ou menor número de passos iterativos antes da convergência ser alcançada, no cálculo de um único autovetor.

O método de Ritz-Wilson tira proveito da forma do carregamento dinâmico quando este é definido seguindo a forma genérica expressa em (III.1). O vetor de partida é tomado a partir da configuração da deformada estática do sistema estrutural, definida por:

$$\{q\} = 1/\beta \cdot \{\hat{q}\} \quad (\text{III.2})$$

$$\{\hat{q}\} = [K]^{-1}\{f(s)\}$$

onde  $\beta$  é um fator de  $[M]$ -normalização. Esta escolha faz com que os vetores de Ritz-Wilson tenham as propriedades e vantagens ressaltadas anteriormente, já que a eles ficam automaticamente incorporadas informações pertinentes à direção e à forma do carregamento. Evita-se assim a necessidade da correção estática da resposta modal e a geração de vetores ortogonais ao carregamento. É evidente, examinando-se a equação (III.2), que se  $\{f(s)\}$  for ortogonal a um modo de vibração qualquer, este modo

não será incluído na base de transformação.

Existem algumas alternativas para a elaboração de algoritmos destinados à geração dos vetores de Ritz-Wilson [7]. O algoritmo A1, apresentado na tabela III.1, foi o originalmente proposto por WILSON [1] e empregado por outros autores [6 e 9].

## ALGORITMO A1 - Formulação inicial de WILSON [1]

```
=====
```

a. Montagem das matrizes de massa [M] e rigidez [K] e do vetor de amplitudes {f(s)}.

b. Triangularização da matriz de rigidez :

$$[K] = [L][D][L]^T$$

c. Determinação do primeiro vetor de Ritz-Wilson :

$$[K]\{\tilde{q}_1\} = \{f(s)\}$$

$$\beta_1 = \sqrt{(\{\tilde{q}_1\}^T [M] \{\tilde{q}_1\})} \quad [M]\text{-normalização}$$

$$\{q_1\} = 1/\beta_1 \cdot \{\tilde{q}_1\}$$

d. Determinação dos demais vetores, para  $i=2 \rightarrow r$  :

d.1 próximo vetor da sequência de Krylov :

$$[K]\{\tilde{q}_i\} = [M]\{q_{i-1}\}$$

d.2 ortogonalização de Gram-Schmidt :

$$c_j = \{\tilde{q}_i\}^T [M] \{q_j\}, \text{ para } j = 1 \rightarrow (i-1)$$

$$\{\hat{q}_i\} = \{\tilde{q}_i\} - \sum_{j=1}^{i-1} c_j \cdot \{q_j\}$$

d.3 [M]-normalização :

$$\beta_i = \sqrt{(\{\hat{q}_i\}^T [M] \{\hat{q}_i\})}$$

$$\{q_i\} = 1/\beta_i \cdot \{\hat{q}_i\}$$

e. Ortogonalização da base em relação a [K] :

e.1 formação da matriz de rigidez reduzida :

$$[K_r] = [Q]^T [K] [Q] \quad \text{onde } [Q] = [q_1 \dots q_r]$$

e.2 solução do problema de autovalor reduzido :

$$[K_r][Z] = [Z][\Lambda] \quad \text{sendo } [Z]_{r \times r}$$

f. Cálculo dos vetores finais de Ritz-Wilson :

$$[\Phi] = [Q][Z]$$

```
=====
```



### III.3 Determinação do Número de Vetores da Base

A qualidade da resposta obtida pela superposição modal, conforme já foi ressaltado anteriormente, é consequência direta das características da base de transformação possibilitarem a representação do problema dinâmico de forma adequada, não introduzindo erros de truncamento apreciáveis no processo de solução. O número ideal de vetores numa base de transformação gerada pelo método de Ritz-Wilson, para um dado problema dinâmico, é aquele que consegue expandir a distribuição do carregamento com uma tolerância aceitável de erro. Numa análise feita com uma base de dimensão inferior a este número ideal poderão ocorrer erros de truncamento e no caso inverso, a partir do ponto de exaustão na representação da carga, surgem vetores espúrios, ortogonais à direção do carregamento.

Um aspecto importante do método de Ritz-Wilson é a possibilidade da determinação do número de vetores mais adequado à análise durante o próprio processo de geração da base de transformação. Esta propriedade é decorrente da semelhança entre as características de forma dos vetores [M]-ortogonalizados da seqüência de Krylov e os vetores finais da base, que ortogonalizam tanto a matriz de massa [M] como a de rigidez [K], que possibilita a determinação de um critério de parada na geração dos vetores a partir do cálculo dos fatores de participação

de carga, definidos no item II.5 anterior, utilizando os vetores que formam  $[Q]$ , gerados no passo  $d$  do algoritmo A1. O erro na representação da carga por um conjunto de  $r$  vetores é definido por :

$$E_p = 1 - \sum_{i=1}^r \mu_i \quad (\text{III.3})$$

onde o fator de participação  $\mu_i$  é dado pela expressão :

$$\mu_i = \frac{\{p\}^T [M] \{q_i\} \{q_i\}^T \{p\}}{\{p\}^T \{p\}} \quad (\text{III.4})$$

A faixa de variação de  $E_p$  vai de 0 a 1. A geração dos vetores deve interromper-se quando  $E_p$  ficar abaixo de uma dada tolerância, que é definida de forma que a base gerada consiga projetar satisfatoriamente o carregamento, definida neste trabalho como  $E_p = 0,10$ . Deve ser salientado que o fator de participação de carga da base é uma condição suficiente porém não necessária para a obtenção de uma boa resposta dinâmica.

### III.4 Implementação Numérica

Alguns aspectos da implementação numérica do algoritmo de Ritz-Wilson, formalmente apresentado na tabela III.1, merecem ser comentados.

O critério de parada, definido no item anterior, deve ser incluído ao final do passo *d* do algoritmo citado. A geração do próximo vetor só deve ser efetivada enquanto o erro  $E_p$  na representação do carregamento for maior do que a tolerância estabelecida e não tenha sido alcançado o número máximo de vetores estabelecido para a análise.

A projeção da matriz de rigidez  $[K]$  no subespaço definido por  $[Q]$ , apresentada no passo *e.1* de maneira formalizada como  $[K_r] = [Q]^T[K][Q]$ , pode ser parcialmente efetuada dentro do laço principal conforme proposta contida em [8], a partir da definição de um conjunto auxiliar de vetores expresso por :

$$[V] = [K][Q] \quad (\text{III.5})$$

$$[V] = \{v_i, i = 1, r\}$$

sendo que os valores  $\{v_i\}$  são apresentados no algoritmo A2, tabela III.2. Este procedimento simplifica o cálculo da projeção da matriz  $[K]$ , que normalmente é armazenada por blocos e em forma de perfil, visando diminuir os requisitos de memória principal e facilitar os algoritmos para solução de equações lineares. Tais esquemas de armazenamento podem dificultar a obtenção explícita do produto  $[K][Q]$ .

A solução do problema de autovalor  $[K_r][Z] = [Z][A]$ , necessária para ortogonalização dos vetores de Ritz-Wilson em relação a matriz de rigidez  $[K]$  e o cálculo das

freqüências associadas aos vetores, foi implementada utilizando-se a rotina *JACOBI* apresentada por BATHE [3], que é uma implementação numérica do método generalizado de Jacobi para solução de problemas de autovalor.

#### ALGORITMO A2 - Implementação do método de Ritz-Wilson

=====

a. Montagem das matrizes de massa  $[M]$  e rigidez  $[K]$  e do vetor de amplitudes  $\{f(s)\}$ .

b. Triangularização da matriz de rigidez :

$$[K] = [L][D][L]^T$$

c. Determinação do primeiro vetor de Ritz-Wilson e do primeiro vetor  $\{v\}$ , resultante do produto  $[K]\{Q\}$  :

$$[K]\{\tilde{q}_1\} = \{f(s)\}$$

$$\{\tilde{v}_1\} = \{f(s)\}$$

$$\beta_1 = \sqrt{(\{\tilde{q}_1\}^T [M] \{\tilde{q}_1\})} \quad [M]\text{-normalização}$$

$$\{q_1\} = 1/\beta_1 \cdot \{\tilde{q}_1\}$$

$$\{v_1\} = 1/\beta_1 \cdot \{\tilde{v}_1\}$$

d. Determinação dos demais vetores, para  $i = 2 \rightarrow NMAX$ , sendo  $NMAX$  o número máximo de vetores estabelecido para a análise.

d.1 próximo vetor da seqüência de Krylov :

$$[K]\{\tilde{q}_i\} = [M]\{q_{i-1}\}$$

$$\{\tilde{v}_i\} = [M]\{q_{i-1}\}$$

d.2 ortogonalização de Gram-Schmidt :

$$c_j = \{\tilde{q}_i\}^T [M] \{q_j\}, \text{ para } j = 1 \rightarrow (i-1)$$

$$\{\tilde{q}_i\} = \{q_i\} - \sum_{j=1}^{i-1} c_j \cdot \{q_j\}$$

$$\{\tilde{v}_i\} = \{v_i\} - \sum_{j=1}^{i-1} c_j \cdot \{v_j\}$$

d.3 [M]-normalização :

$$\beta_i = \sqrt{(\{\tilde{q}_i\}^T [M] \{\tilde{q}_i\})}$$

$$\{q_i\} = 1/\beta_i \cdot \{\tilde{q}_i\}$$

$$\{v_i\} = 1/\beta_i \cdot \{\tilde{v}_i\}$$

d.4 Critério de parada :

$$E_p = 1 - \sum_{j=1}^i \mu_j$$

$E_p < 0,10$  vai para o passo e

e. Ortogonalização em relação a matriz de rigidez [K]

$$[K_r] = [Q]^T [V] \quad \text{onde } [Q] = [q_1 \dots q_r]$$

$$\text{e } [V] = [v_1 \dots v_r]$$

$$[K_r][Z] = [Z][\Lambda] \quad \text{sendo } [Z]_{r \times r}$$

f. Cálculo dos vetores finais de Ritz-Wilson :

$$[\Phi] = [Q][Z]$$

### III.5 Cálculo da Resposta Dinâmica

A resposta do problema dinâmico pode ser calculada empregando-se os mesmos procedimentos utilizados no método da superposição modal clássica que são realizados após a obtenção dos modos de vibração e das frequências naturais do sistema estrutural. Estas duas entidades, no método de Ritz-Wilson, são respectivamente substituídas por duas matrizes definidas nos passos e e  $f$  dos algoritmos A1 ou A2 apresentados. A primeira matriz, propositalmente denominada  $[\Phi]$ , que foi a mesma notação utilizada para representar a matriz dos modos de vibração do sistema estrutural no resumo feito da superposição modal clássica, é composta por :

$$[\Phi] = [\{\phi_1\} \{\phi_2\} \dots \{\phi_r\}] \quad (\text{III.6})$$

onde  $\phi_1$  são os vetores  $[M]$ -ortonormais e  $[K]$ -ortogonais de Ritz-Wilson. A segunda é a matriz diagonal  $[\Lambda]$ , definida na solução do problema de autovalor reduzido do sistema estrutural, projetado no subespaço de base  $[Q]$ , que contém o quadrado das frequências pertinentes aos vetores  $\phi_1$ .

Este é um aspecto bastante interessante e atrativo do método de Ritz-Wilson, que, assim, pode ser facilmente implementado em qualquer programa computacional que trate da solução de problemas estruturais pelo método dos

elementos finitos e que contenha facilidades para solução de problemas dinâmicos pelo método da superposição modal clássica.

### III.6 Qualidade da Resposta

A qualidade e confiabilidade da resposta dinâmica obtida pelo método de Ritz-Wilson para um sistema estrutural que tenha sido adequadamente modelado está associada aos quatro fatores listados abaixo :

#### - *Representação do Carregamento*

A base de Ritz-Wilson deve ser capaz de representar de forma satisfatória o carregamento imposto à estrutura, de modo que não ocorra truncamento da resposta devido às componentes modais não atendidas pela base. A aplicação de adequados critérios de parada no algoritmo para a formação da base, conforme exposto neste capítulo no item III.3, assegura a adequabilidade da base gerada na representação da carga.

#### - *Massa Efetiva*

A massa efetiva [7] define quantitativamente a parcela da massa total do sistema estrutural que está associada a cada vetor da base de Ritz-Wilson. Este parâmetro é definido para cada direção por :

$$\Gamma_{1j} = \frac{\{r_j\}^T [M] \{\phi_1\} \{\phi_1\}^T [M] \{r_j\}}{\{r_j\}^T [M] \{r_j\}} \quad (\text{III.7})$$

onde  $\Gamma_{1j}$  é o fator que mede a massa efetiva da direção  $j$  relacionada ao vetor  $\{\phi_1\}$  e  $\{r_j\}$  é o vetor que contém 1 nos graus de liberdade pertinentes à direção  $j$  e zero nas demais posições. A dedução do fator  $\Gamma_{1j}$  é similar à do fator de participação de carga, apresentada em II.5, tomando-se o carregamento devido a um sismo na direção  $j$ , expresso por  $\{p_j(t)\} = [M]\{r_j\}$ .

O monitoramento do fator de massa efetiva, que tem variação de 0 a 1, é importante para a quantificação da massa que está sendo representada pela base de Ritz-Wilson. O fator pertinente à direção do carregamento aplicado ao sistema estrutural deve ser próximo à unidade, garantindo uma boa representação da massa envolvida no problema dinâmico.

#### *- Resíduo na Resposta*

A base gerada, mesmo não tendo atingido um satisfatório fator de participação de carga, pode ser adequada na representação do problema dinâmico e gerar uma resposta equilibrada em relação ao carregamento. A medida do desequilíbrio, ou resíduo, da resposta pode ser expressa a partir da igualdade (II.1) como :

$$\{e\} = \{p\} - [M]\{\ddot{u}\} - [C]\{\dot{u}\} - [K]\{u\} \quad (\text{III.8})$$



utilizando-se a transformação  $\{u\} = [\Phi]\{x\}$  temos :

$$\{e\} = \{p\} - [M][\Phi]\{\ddot{x}\} - [C][\Phi]\{\dot{x}\} - [K][\Phi]\{x\} \quad (\text{III.9})$$

como a partir da equação (II.8) temos que :

$$\{\ddot{x}\} = [\Phi]^T\{p\} - [\Theta]\{\dot{x}\} - [\Lambda]\{x\} \quad (\text{III.10})$$

a equação (III.9) pode ser reescrita da forma :

$$\begin{aligned} \{e\} = & (\{p\} - [M][\Phi][\Phi]^T\{p\}) - \\ & ([C][\Phi] - [M][\Phi][\Theta]).\{\dot{x}\} - \\ & ([K][\Phi] - [M][\Phi][\Lambda]).\{x\} \end{aligned} \quad (\text{III.11})$$

O segundo termo do membro à esquerda da equação anterior é nulo, haja visto que:

$$\begin{aligned} [\Phi]^T[C][\Phi] &= [\Theta] \\ [C][\Phi] &= [M][\Phi][\Theta] \end{aligned} \quad (\text{III.12})$$

O erro na resposta devido ao desequilíbrio dinâmico pode então ser expresso por :

$$\begin{aligned} \{e\} = & (\{p\} - [M][\Phi][\Phi]^T\{p\}) - \\ & ([K][\Phi] - [M][\Phi][\Lambda]).\{x\} \end{aligned} \quad (\text{III.13})$$

onde  $\{e\}$  contém o resíduo ou desequilíbrio para cada grau de liberdade do sistema estrutural. A partir da expressão

(III.13) é possível o estabelecimento de um único fator adimensional,  $E_r$ , que representa o erro na resposta dinâmica obtida. Premultiplicando-se aquela expressão por  $\{p\}^T$  e dividindo-a por  $\{p\}^T\{p\}$  obtemos :

$$E_r(t) = E_p(t) - E_a(t) \quad (III.14)$$

$$E_p(t) = 1 - \frac{\{p(t)\}^T[M][\Phi][\Phi]^T\{p(t)\}}{\{p(t)\}^T\{p(t)\}}$$

$$E_a(t) = \frac{\{p(t)\}^T.([K][\Phi] - [M][\Phi][\Lambda]).\{x(t)\}}{\{p(t)\}^T\{p(t)\}}$$

Deve ser observado que  $E_p$  é o erro na representação da carga, definido anteriormente. O valor nulo de  $E_r$  significa uma resposta dinâmica equilibrada.

Neste trabalho, além do parâmetro  $E_r$ , foi utilizada uma variante definida por :

$$E_{rg}(t) = E_{pg}(t) - E_{ag}(t) \quad (III.15)$$

$$E_{pg}(t) = \frac{\{p(t_g)\}^T\{p(t)\} - \{p(t_g)\}^T[M][\Phi][\Phi]^T\{p(t)\}}{\{p(t_g)\}^T\{p(t_g)\}}$$

$$E_{ag}(t) = \frac{\{p(t_g)\}^T.([K][\Phi] - [M][\Phi][\Lambda]).\{x(t)\}}{\{p(t_g)\}^T\{p(t_g)\}}$$

Este parâmetro variante representa o desequilíbrio dinâmico que ocorre no instante  $t$  em relação a carga no instante característico  $t_g$ , que pode ser tomado como o instante de carga máxima e foi definido visando evitar os problemas numéricos que ocorrem no cálculo de  $E_r$  quando o

produto  $\{p(t)\}^T\{p(t)\}$ , que representa o carregamento em  $t$ , resulta num valor pequeno em relação aos outros fatores no cálculo do resíduo.

O monitoramento do resíduo ao longo do período de análise é um importante procedimento para a confiabilidade da resposta obtida. A geração de bases com maiores fatores de participação de carga pode ser necessária nos casos em que ocorrerem resíduos significativos.

- *Frequência de excitação :*

Os primeiros vetores de uma base de Ritz-Wilson, aqueles de mais baixa frequência, são boas aproximações dos modos de vibração da estrutura e as frequências a eles associadas representam, da mesma forma, aproximações das frequências naturais do sistema estrutural.

Os últimos vetores, por outro lado, são compostos por combinações lineares dos modos de alta frequência da estrutura, gerados a partir das características de forma do carregamento, contendo informações que fornecem, no método de Ritz-Wilson, a parcela da resposta dinâmica obtida pela *correção estática* da superposição modal clássica. A estes vetores estão associadas frequências que são pertinentes ao método de Ritz-Wilson e não possuem nenhuma ligação com as frequências naturais da estrutura, podendo serem chamadas de *pseudo-frequências* ou *frequências falsas*.

Quando a freqüência de excitação aproxima-se de uma dessas *pseudo-freqüências* o procedimento de solução gera falsas ressonâncias com respostas completamente distorcidas e sem nenhum significado real.

Outro tipo de problema ocorre com o caso inverso do exposto anteriormente. Carregamentos cuja alta freqüência de excitação está fora do intervalo de freqüências adequadamente representadas pela base de Ritz-Wilson podem, quando analisados, eventualmente levarem a respostas erradas, haja visto que existe a possibilidade da alta freqüência de excitação coincidir ou ser próxima de uma freqüência natural mais alta da estrutura que não esteja contemplada na base gerada.

Uma forma de qualificar quais os vetores da base representam boas aproximações dos modos de vibração do sistema estrutural é apresentada por MARQUES [11]. Partindo-se do *passo f* do algoritmo A2, apresentado na tabela III.2, temos que o vetor  $\{\Phi_j\}$  da base gerada é expresso por :

$$\{\Phi_j\} = z_1\{q_1\} + z_2\{q_2\} + \dots + z_{r-1}\{q_{r-1}\} + z_r\{q_r\}$$

(III.16)

onde  $\{q_j\}$  são os vetores que formam  $[Q]$  e  $z_k$  representa, simplifcadamente, o  $k$ -ésimo elemento do autovetor  $\{z_j\}$  do problema de autovalor reduzido. Caso o vetor  $\{\Phi_j\}$  seja uma boa aproximação para um modo natural da estrutura no

passo  $r-2$ , por exemplo, é natural que os próximos vetores da sequência de Krylov ortogonalizada não apresentem componentes do mesmo, o que se manifesta por valores pequenos para as componentes  $z_{r-1}$  e  $z_r$  de  $\{z_j\}$ . Portanto é possível a qualificação de quais vetores são boas aproximações de autovetores reais do sistema estrutural através do monitoramento da magnitude relativa do último elemento de cada vetor  $\{z_j\}$ . Quanto menor for este elemento em relação aos demais elementos do autovetor reduzido, melhor será a aproximação de  $\{\Phi_j\}$  a um modo de vibração natural da estrutura. Este critério é utilizado para a aceitação da convergência de um autovetor no algoritmo de Lanczos [11].

Os dois tipos de falha na determinação da resposta dinâmica relacionadas com a frequência de excitação não são detectados pelos parâmetros para determinação de resíduos, apresentados no item anterior. O primeiro tipo de falha é inerente ao método de Ritz-Wilson, enquanto o segundo tanto pode ocorrer neste método como na superposição modal clássica.

Cuidados especiais devem ser tomados, portanto, na geração de bases de transformação de Ritz-Wilson para a análise de estruturas sujeitas a carregamentos de alta frequência. Nestes casos deve ser gerado um número suficiente de vetores que assegure que a frequência de excitação esteja contida dentro da faixa dos vetores de Ritz-Wilson que correspondem a uma boa aproximação dos autovetores.

## Capítulo IV

### O MÉTODO DE LANCZOS

O método de Lanczos, proposto em 1950, é uma eficiente estratégia para extração de algumas frequências naturais e modos de vibração de um sistema estrutural. A sua primeira etapa consiste na redução das matrizes envolvidas no problema em matrizes tridiagonais, formando um problema de autovalor tridiagonal correlato ao original e de solução mais fácil. NOUR-OMID e CLOUGH [13] demonstraram que o método pode ser utilizado de forma bastante eficiente para o cálculo da resposta dinâmica, com uma redução de coordenadas similar à da superposição modal ou à de uma análise de Ritz-Wilson, sem a necessidade da solução de um problema de autovalor.

O procedimento para a geração dos vetores e matrizes necessários para a redução do sistema de equações pertinentes ao problema está relacionado nos passos do Algoritmo A3, apresentado na tabela IV.1.

As transformações feitas baseiam-se na igualdade :

$$[R]^T[M][K]^{-1}[M][R] = [T] \quad (\text{IV.1})$$

onde  $[T]$  é a matriz tridiagonal e  $[R]$  é a matriz com os

vetores de Lanczos, ambas definidas na tabela IV.1. A igualdade (IV.1) mostra que a projeção do produto  $[M][K]^{-1}[M]$  no subespaço de base  $[R]$  resulta numa matriz tridiagonal. Esta propriedade será utilizada no procedimento para obtenção da resposta dinâmica.

Premultiplicando-se a equação (II.1) por  $[M][K]^{-1}$ , obtemos :

$$\begin{aligned} &[M][K]^{-1}[M]\{\ddot{u}\} + \\ &[M][K]^{-1}[C]\{\dot{u}\} + \\ &[M]\{u\} = [M][K]^{-1}\{p(t)\} \end{aligned} \quad (IV.2)$$

Utilizando a transformação de Lanczos,  $\{u\} = [R]\{y\}$ , sendo  $\{y\}$  o vetor de coordenadas generalizadas no subespaço de base  $[R]$ , e completando a transformação, obtemos :

$$\begin{aligned} &[R]^T[M][K]^{-1}[M][R]\{\ddot{y}\} + \\ &[R]^T[M][K]^{-1}[C][R]\{\dot{y}\} + \\ &[R]^T[M][R]\{y\} = [R]^T[M][K]^{-1}\{p(t)\} \end{aligned} \quad (IV.3)$$

Utilizando a  $[M]$ -ortonormalidade da base  $[R]$ , supondo que o amortecimento possa ser expresso da forma  $[C] = a_0[M] + a_1[K]$  e utilizando a igualdade expressa em (IV.1), obtemos :

$$[T]\{\ddot{y}\} + (a_0[T] + a_1[I])\{\dot{y}\} + \{y\} = \{g\} \quad (IV.4)$$

onde o vetor  $\{g\}$  é definido por  $\{g\} = [R]^T[M][K]^{-1}\{p(t)\}$  e

$[I]$  é a matriz identidade de ordem  $r$ . Nos casos em  $\{p(t)\}$  possa ser expresso por  $\{p(t)\} = \{f(s)\}.g(t)$ , o vetor  $\{g\}$  pode ser expresso de forma extremamente vantajosa para a análise como :

$$\begin{aligned}\{g\} &= [R]^T[M][K]^{-1}\{f(s)\}.g(t) \\ \{g\} &= [R]^T[M]\{r_1\}.\beta_1.g(t) \\ \{g\} &= [R]^T[M][R]\{e_1\}.\beta_1.g(t) \\ \{g\} &= \beta_1.\{e_1\}.g(t)\end{aligned}\tag{IV.5}$$

onde  $\{e_1\}$  é a primeira coluna da matriz identidade  $[I]$  de ordem  $r$ . A expressão (IV.5) mostra que a excitação é aplicada somente sobre a primeira equação modal de (IV.4).

A solução do sistema tridiagonal de equações de movimentos em (IV.4) pode ser obtida tanto por processos de integração direta, tais como o método de Newmark ou o de Wilson- $\theta$ , ou por superposição modal das equações desacopladas a partir da solução dos autovetores associados à equação (IV.4). Os deslocamentos finais  $\{u\}$  podem ser obtidos utilizando-se a transformação de coordenadas  $\{u\} = [R]\{y\}$ .

Como no procedimento de obtenção da base  $[R]$  as  $[M]$ -ortogonalizações só são feitas com os dois vetores anteriores da seqüência de Krylov, NOUR-OMID e CLOUGH [13] sugerem testes para detecção de perda de ortogonalidade entre os vetores gerados e a implementação de algoritmos para ortogonalização seletiva.



É importante observar que tal qual os vetores de Ritz-Wilson, os vetores de Lanczos também são gerados a partir da distribuição espacial  $\{f(s)\}$  do carregamento dinâmico e todos os benefícios que tal propriedade traz na utilização daqueles vetores também ocorrem no emprego da base de Lanczos.

Outra característica que merece ser mencionada é que

$$[K_r]^{-1} = [T] \text{ , quando } r = n \quad (\text{IV.6})$$

onde  $[K_r] = [Q]^T[K][Q]$ , sendo  $[Q]$  a base de Ritz-Wilson antes do processo de ortogonalização em relação a matriz de rigidez  $[K]$ .

Nas aplicações numéricas utilizadas como exemplo neste trabalho só foi utilizado o método de Ritz-Wilson, empregando-se os algoritmos descritos no capítulo III. A apresentação do método de Lanczos é feita com o sentido de apresentar as opções existentes à superposição modal clássica elaboradas a partir do trabalho de WILSON *et al.* [1] e de ressaltar que as estratégias de mudança de base, propostas neste trabalho, são também aplicáveis ao método de Lanczos quando o carregamento  $\{p(t)\}$  não puder ser expresso na forma do produto  $\{f(s)\}.g(t)$ .

## ALGORITMO A3 - Obtenção da base de Lanczos

=====

a. Montagem das matrizes de massa  $[M]$  e rigidez  $[K]$  e do vetor de amplitudes  $\{f(s)\}$ .

b. Triangularização da matriz de rigidez :

$$[K] = [L][D][L]^T$$

c. Inicialização do processo :

$$[K]\{\tilde{r}_0\} = \{f(s)\}$$

$$\beta_1 = \sqrt{(\{\tilde{r}_0\}^T[M]\{\tilde{r}_0\})} \quad [M]\text{-normalização}$$

d. Geração da base. Para  $i=1 \rightarrow r$  :

$$\{r_1\} = 1/\beta_1 \cdot \{\tilde{r}_{i-1}\}$$

$$\{\hat{r}_1\} = [K]^{-1}[M]\{r_1\}$$

$[M]$ -ortogonalização :

$$\alpha_1 = \{r_1\}^T[M]\{\hat{r}_1\} \quad \text{Gran-Schmidt}$$

$$\{\tilde{r}_1\} = \{\hat{r}_1\} - \alpha_1 \cdot \{r_1\} - \beta_1 \cdot \{r_{i-1}\}$$

preparação para o próximo passo :

$$\beta_{i+1} = \sqrt{(\{r_1\}^T[M]\{r_1\})}$$

e. Montagem das matrizes  $[R]$  e  $[T]$  :

$$[R] = [\{r_1\} \{r_2\} \dots \{r_r\}]$$

$$[T] = \begin{bmatrix} \alpha_1 & \beta_2 & & & & \\ \beta_2 & \alpha_2 & \beta_3 & & & \\ & \beta_3 & \alpha_3 & . & & \\ & & . & . & . & \\ & & & . & . & \beta_r \\ & & & & \beta_r & \alpha_r \end{bmatrix}$$

=====

TABELA IV.1

## Capítulo V

### RESPOSTA EM REGIME PERMANENTE

#### V.1 Introdução

A resposta em regime permanente (*Steady-State*) fica caracterizada quando a influência transiente do amortecimento torna-se desprezível na resposta de sistemas estruturais submetidos a excitações periódicas. Um exemplo de cargas periódicas ocorre no caso do carregamento devido à ação das ondas em estruturas marítimas.

Quando o carregamento periódico é de natureza harmônica a resposta permanente pode ser obtida de forma direta, através do equacionamento do problema dinâmico no domínio da frequência.

A resposta permanente para sistemas estruturais sujeitos a cargas periódicas genéricas, não harmônicas, é tradicionalmente obtida pela decomposição da carga periódica em uma série de Fourier, para posterior análise no domínio da frequência, ou pela integração de um número suficientemente grande de períodos de excitação para o desaparecimento da resposta transiente, no domínio do tempo.

As duas estratégias, apesar da simplicidade que possuem, apresentam inconvenientes consideráveis. A análise direta no domínio do tempo de estruturas de grande porte, sem a transformação modal, apresenta um custo numérico proibitivo, inviabilizando a sua utilização como instrumento corrente em projetos estruturais. A integração no domínio do tempo das equações modais também requer um número expressivo de operações, fato que pode ser agravado com a presença de não linearidades localizadas, tratadas pelo método das pseudo-forças, quando é necessário a utilização de algoritmos iterativos para a garantia do equilíbrio dinâmico ao final de cada intervalo de integração. A análise no domínio da frequência, que normalmente é utilizada no método da superposição modal, pode obrigar a utilização de um grande número de termos nas séries de Fourier para a representação correta dos casos de carregamento com funções temporais muito irregulares. Tais funções ocorrem, por exemplo, na representação das cargas devidas às ondas na região próxima à superfície do mar, em estruturas marítimas.

O procedimento proposto por VELETOS e KUMAR [2] e utilizado por LIMA *et al.* [14], permite a obtenção da resposta em regime permanente adicionando-se uma *correção* à resposta transiente de um ciclo de excitação, calculada por integração no domínio do tempo das equações modais. Este procedimento está fundamentado no fato que a principal diferença entre as respostas transiente e

permanente de um ciclo de excitação típico está na diferença entre as condições iniciais dos movimentos do sistema estrutural. Portanto, a *correção* que é feita à resposta transiente assegura a igualdade entre os movimentos nos instantes inicial e final de um ciclo de excitação.

O procedimento apresentado a seguir é válido e aplicável a qualquer ciclo de excitação. Por conveniência e simplicidade adotou-se neste trabalho o instante zero como sendo o instante inicial do ciclo de excitação, estando o sistema estrutural em repouso.

## V.2 Procedimento para o Cálculo da Resposta Permanente

A resposta em regime permanente  $\{y(t)\}$  pela proposta de VELETSOS, pode ser calculada como a soma da resposta transiente  $\{x(t)\}$ , obtida pelo procedimento clássico descrito anteriormente, e a resposta de correção  $\{z(t)\}$  :

$$\{y(t)\} = \{x(t)\} + \{z(t)\} \quad (V.1)$$

onde a correção é definida por :

$$z_i(t) = r_i(t).z_i(0) + v_i(t).\dot{z}_i(0) \quad (V.2)$$

onde  $i$  denota cada elemento dos vetores envolvidos em (V.1) e  $r(t)$  e  $v(t)$  são as respostas não amortecidas para

um sistema linear excitado por um deslocamento unitário inicial e por uma velocidade unitária inicial, respectivamente, definidos por :

$$r(t) = \left[ \frac{\xi w}{\hat{w}} \sin(\hat{w}.t) + \cos(\hat{w}.t) \right] e^{-\xi.w.t}$$

$$v(t) = \left[ \frac{1}{\hat{w}} \sin(\hat{w}.t) \right] e^{-\xi.w.t} \quad (V.3)$$

As constantes  $z(0)$  e  $\dot{z}(0)$  podem ser determinadas impondo-se a condição que caracteriza a resposta em regime permanente, ou seja, a igualdade de movimentos no instante inicial e final do período de excitação, expressa por :

$$\{y(T)\} = \{y(0)\} \text{ e } \{\dot{y}(T)\} = \{\dot{y}(0)\} \quad (V.4)$$

onde  $T$  é o período de excitação. Substituindo a expressão (V.1) na igualdade (V.4) temos :

$$\{x(T)\} + \{z(T)\} = \{x(0)\} + \{z(0)\} \quad (V.5)$$

$$\{\dot{x}(T)\} + \{\dot{z}(T)\} = \{\dot{x}(0)\} + \{\dot{z}(0)\}$$

usando a expressão (V.2), as relações em (V.5) podem ser escritas matricialmente e de forma genérica para cada elemento dos vetores envolvidos, como :

$$\begin{bmatrix} r(T)-1 & v(T) \\ \dot{r}(T) & \dot{v}(T)-1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} z(0) \\ \dot{z}(0) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \Delta x \\ \Delta \dot{x} \end{Bmatrix} \quad (V.6)$$

onde  $\Delta x = x(0) - x(T)$  e  $\Delta \dot{x} = \dot{x}(0) - \dot{x}(T)$ . A solução da equação (V.6) é dada por :

$$z(0) = [\Delta x(\dot{v}(T)-1) - \Delta \dot{x}.v(T)] / D \quad (V.7)$$

$$\dot{z}(0) = [\Delta \dot{x}(r(T)-1) - \Delta x.\dot{r}(T)] / D$$

onde  $D$  é o determinante da matriz de coeficientes de equação (V.6), definido por :

$$D = r(T).\dot{v}(T) - \dot{r}(T).v(T) - r(T) - \dot{v}(T) + 1$$

O procedimento para a determinação da resposta em regime permanente a partir de um ciclo da resposta transiente, fica então resumido nos seguintes passos :

- Cálculo da resposta transiente para um ciclo completo de excitação através da integração no tempo das equações modais, através do procedimento descrito anteriormente.
- Cálculo das constantes  $z(0)$  e  $\dot{z}(0)$ , resolvendo a equação (V.6), para cada componente modal do sistema.
- Determinação da resposta corretiva,  $\{z(t)\}$ , definida pela expressão (V.2).
- Obtenção da resposta em regime permanente com a utilização da equação (V.1).

### V.3 Comentários

Como nota final, é importante salientar, como foi observado em [2], que o determinante  $D$ , definido nas expressões (V.7), se anula para sistemas não amortecidos quando  $\omega T$  é múltiplo de  $2\pi$ , ou em outras palavras, quando o sistema estrutural entra em ressonância não amortecida. Portanto, para se evitar esta possível indeterminação na solução, é aconselhável sempre a consideração de pelo menos a presença de uma quantidade mínima de amortecimento na análise, já que na prática todos os sistemas estruturais apresentam pelo menos algum amortecimento.

O cálculo da resposta transiente do primeiro ciclo de excitação em sistemas estruturais que estão em repouso no instante zero pode, em alguns casos de carregamento, apresentar perturbações na resposta para os primeiros passos de integração. Como exemplo destes casos de carregamento, podem ser citados os de grande magnitude de carga no instante zero ou os carregamentos que nos primeiros passos da integração apresentem perfis de carga que são representados, dentro de uma base de Ritz-Wilson, pelos últimos vetores, que são os responsáveis pela resposta devida à *correção estática*. Estas perturbações são detectadas pelo índice indicador de resíduo no equilíbrio das equações dinâmicas,  $Er(t)$ , definido no item III.6 deste trabalho.



Para a garantia da qualidade da resposta em regime permanente, portanto, é aconselhável a integração transiente de dois ciclos de excitação a partir do instante zero, onde, por suposição, a estrutura está em repouso. A resposta permanente pode então ser calculada para o segundo ciclo de excitação. Tal cuidado não onera de forma significativa a análise, haja visto que o cálculo da resposta transiente para as equações modais é uma operação extremamente simples e rápida.

## Capítulo VI

### MUDANÇA DE BASE

#### VI.1 Introdução

O método de Ritz-Wilson associado ao procedimento de integração direta da resposta em regime permanente é uma estratégia extremamente eficiente para a análise de sistemas estruturais submetidos a cargas periódicas genéricas. Como já foi enfatizado anteriormente neste trabalho, o emprego deste método fica restrito às análises em que a carga imposta ao sistema estrutural atenda à definição dada pela expressão (III.1).

Os tipos de carregamentos normalmente encontrados não obedecem tal expressão. No carregamento devido às ondas em estruturas marítimas, por exemplo, ocorrem defasagens entre os instantes de aplicação de carga ao longo dos diversos pontos da estrutura.

Uma estratégia que pode ser empregada nestes casos é a determinação de uma base genérica de Ritz-Wilson partindo-se do carregamento atuante em um determinado instante característico de carga máxima, tal como o cortante máximo ou momento de tombamento máximo na base de uma jaqueta. A resposta dinâmica para todo o intervalo de integração é

obtida utilizando-se esta base de transformação característica. A confiabilidade da resposta pode ser assegurada através do monitoramento do resíduo existente no equilíbrio da equação dinâmica. Tal estratégia apresenta bons resultados para casos de carga com pequena defasagem.

Um procedimento genérico proposto por este trabalho é a utilização de diversas bases de Ritz-Wilson, cada uma pertinente e adequada a um determinado intervalo de integração das equações dinâmicas. A determinação do número de bases necessárias e dos instantes em que serão calculadas é uma propriedade característica de cada problema estrutural.

Um aspecto que deve ser salientado é que mesmo a utilização de diversas bases representa, de forma geral, um trabalho numérico inferior àquele necessário para a análise dinâmica utilizando-se a superposição modal clássica com o dispositivo de correção estática incluído.

## VI.2 Geração das Bases

O problema dinâmico discretizado pelo método dos elementos finitos que é posto para ser resolvido é expresso pela seguinte equação dinâmica :

$$[M]\{\ddot{u}\} + [C]\{\dot{u}\} + [K]\{u\} = \{p(t)\} \quad (VI.1)$$

onde  $\{p(t)\}$  é genérico e não pode ser definido pela expressão (III.1).

- *Base Principal :*

A partir da escolha de um instante com carregamento típico para a análise do problema dinâmico, definido como  $t_g$ , a geração da base típica é feita utilizando-se o mesmo procedimento descrito no algoritmo A2, apresentado na tabela III.2, substituindo-se no passo  $c$ , denominado *Determinação do primeiro vetor de Ritz-Wilson*, o vetor de amplitudes  $\{f(s)\}$  pelo vetor de cargas no instante  $t_g$ ,  $\{p(t_g)\}$ .

As operações do passo  $c$  passam a ser expressas por :

$$[K]\{\tilde{q}_1\} = \{p(t_g)\} \quad (VI.2)$$

$$\{\tilde{v}_1\} = \{p(t_g)\}$$

$$\beta_1 = \sqrt{(\{\tilde{q}_1\}^T [M] \{\tilde{q}_1\})}$$

$$\{q_1\} = 1/\beta_1 \cdot \{\tilde{q}_1\}$$

$$\{v_1\} = 1/\beta_1 \cdot \{\tilde{v}_1\}$$

Uma primeira análise de todo intervalo de integração é feita utilizando-se esta base para a obtenção da resposta transiente. A qualidade da resposta dinâmica obtida é avaliada monitorando-se o resíduo existente no equilíbrio das equações dinâmicas para cada instante de integração. É importante salientar que para o cálculo do resíduo são

necessárias somente as respostas modais em coordenadas generalizadas contidas em  $\{x\}$ , não sendo preciso, portanto, o cálculo da resposta final  $\{u\} = [\Phi]\{x\}$  e a determinação dos esforços e tensões ao nível dos elementos.

- *Bases Secundárias :*

Caso os resíduos da análise utilizando a *base principal* estejam abaixo de uma dada tolerância a análise pode ser considerada satisfatória e pode prosseguir com a determinação da resposta modal em regime permanente e o cálculo dos deslocamentos estruturais e das tensões nos elementos.

A situação oposta, quando os resíduos em determinados intervalos da integração estão acima da tolerância estabelecida, requer a determinação de outras bases específicas para cada intervalo de integração. Tais bases podem ser geradas substituindo-se nas expressões definidas em (VI.2)  $\{p(t_g)\}$  por  $\{p(t_i)\}$ , onde  $t_i$  é o instante característico para cada base  $i$  gerada.

Uma nova análise é feita, utilizando-se as novas bases geradas e a base inicial, e novamente o resíduo é monitorado. O processo se repete com a inclusão de novas bases na análise, até que a tolerância admitida para o resíduo seja atendida em todo o intervalo de integração.

A geração das bases secundárias pode ser feita de forma mais eficiente nos casos em que o resíduo  $Er(t)$  seja oriundo, principalmente, do truncamento da resposta devida às parcelas do carregamento associadas às componentes modais de alta frequência. Tal resposta é calculada, no método da superposição modal clássica, pelo dispositivo de *correção estática*. Nestes casos é possível a geração de uma nova base através da troca dos últimos vetores da *base principal*, que no método de Ritz-Wilson são os responsáveis pelas componentes de alta frequência da resposta.

Utilizando este procedimento para a geração das bases secundárias, existirão alguns vetores de Ritz-Wilson comuns a todas as bases empregadas para a solução do problema e, portanto, só será necessário a utilização do procedimento de mudança de base sobre as equações modais pertinentes aos vetores que são diferentes nas diversas bases.

O Algoritmo A4, apresentado na tabela VI.1, possibilita a substituição do último vetor de uma base para a incorporação da *correção estática* para outro instante de carga.

## ALGORITMO A4 - Substituição do Último Vetor

=====

a. Dados :

Carregamento no instante  $t1$  :  $\{p(t_1)\}$ Base principal :  $[\Phi_P] = [\{\Phi_1\} \{\Phi_2\} \dots \{\Phi_{r-1}\} \{\Phi_r\}]$ b. Determinação do último vetor para o instante  $t1$ :

$$[K]\{\tilde{q}\} = \{p(t_1)\}$$

b.1 ortogonalização com a base principal :

$$c_j = \{\tilde{q}\}^T [M] \{\Phi_j\}, \text{ para } j = 1 \rightarrow (r-1)$$

$$\{\hat{q}\} = \{\tilde{q}\} - \sum_{j=1}^{r-1} c_j \cdot \{\Phi_j\}$$

b.2 [M]-normalização :

$$\beta_1 = \sqrt{(\{\hat{q}\}^T [M] \{\hat{q}\})}$$

$$\{q\} = 1/\beta_1 \cdot \{\hat{q}\}$$

c. Ortogonalização dos vetores de Ritz-Wilson em relação a matriz de rigidez  $[K]$  :

c.1 formação da matriz de rigidez reduzida :

$$[K_r] = [Q]^T [K] [Q]$$

$$\text{onde } [Q] = [\{\Phi_1\} \{\Phi_2\} \dots \{\Phi_{r-1}\} \{q\}]$$

c.2 solução do problema de autovalor reduzido :

$$[K_r][Z] = [Z][\Lambda] \quad \text{sendo } [Z]_{r \times r}$$

d. Base para o instante  $t1$  :

$$[\Phi_1] = [Q][Z]$$

=====

### VI.3 Resposta no Domínio do Tempo

O procedimento de integração da resposta modal no domínio do tempo, descrito no item II.3, é inicializado supondo-se que a estrutura encontra-se em repouso no instante inicial de integração e a partir desta condição calcula-se a resposta para o instante seguinte da análise, a qual, por sua vez, servirá de condição inicial para o próximo intervalo de integração e assim sucessivamente até o instante final da análise.

O problema que se encontra com a utilização de várias bases na mesma análise é como transferir a resposta modal expressa por uma base de transformação, pertinente a uma determinada faixa de intervalos de tempo da análise, para a base subsequente. Para uma melhor visualização deste problema será utilizado, como exemplo, um problema genérico que possa ser resolvido utilizando-se duas bases de Ritz-Wilson, contidas em  $[\Phi_1]$  e  $[\Phi_2]$ , respectivamente. A base  $[\Phi_1]$  atende ao intervalo que se estende de  $t_0$  a  $t_1$  e a base  $[\Phi_2]$  é pertinente ao intervalo  $t_1$  a  $t_2$ . O instante de mudança de base ocorre em  $t_1$ .

A premissa básica para que a mudança de base possa ser efetuada é que a resposta no instante  $t_1$  possa ser representada, aproximadamente com a mesma qualidade, tanto por  $[\Phi_1]$  como por  $[\Phi_2]$ .



Esta premissa é expressa por :

$$\{u(t_1)\} = [\Phi_1]\{x_1(t_1)\} = [\Phi_2]\{x_2(t_1)\} \quad (\text{VI.3})$$

onde  $\{x_1\}$  e  $\{x_2\}$  são as respostas modais nos subespaços de base  $[\Phi_1]$  e  $[\Phi_2]$ , respectivamente.

O procedimento de integração no domínio do tempo partirá do instante  $t_0$ , utilizando a base  $[\Phi_1]$ , e calculará a resposta  $\{x_1\}$  até o instante  $t_1$ . Para o cálculo da resposta em  $t_1 + \delta t$ , que é um instante de tempo contido na faixa que deve ser analisada utilizando-se a base  $[\Phi_2]$ , é necessário exprimir a resposta em  $t_1$  nesta segunda base. Para isto é necessário transformar a resposta modal do instante  $t_1$  da base  $[\Phi_1]$  para a base  $[\Phi_2]$ .

Partindo-se da equação (VI.3) temos :

$$[\Phi_2]\{x_2(t_1)\} = [\Phi_1]\{x_1(t_1)\} \quad (\text{VI.4})$$

$$[\Phi_2]^T[M][\Phi_2]\{x_2(t_1)\} = [\Phi_2]^T[M][\Phi_1]\{x_1(t_1)\}$$

como  $[\Phi_2]^T[M][\Phi_2] = [I]$ , sendo  $[I]$  a matriz de identidade de mesma ordem que  $[\Phi_2]$ , e definindo :

$$[\Omega_{21}] = [\Phi_2]^T[M][\Phi_1] \quad (\text{VI.5})$$

sendo  $[\Omega_{21}]$  a matriz de transformação de coordenadas da base  $[\Phi_1]$  para a base  $[\Phi_2]$ , chegamos a seguinte expressão para a transformação dos resultados obtidos na primeira

base para a segunda base :

$$\{x_2(t_1)\} = [\Omega_{21}]\{x_1(t_1)\} \quad (\text{VI.6})$$

Obtida a resposta  $\{x_2(t_1)\}$ , ela é utilizada como condição inicial para o cálculo de  $\{x_2(t_1+\delta t)\}$  e a análise pode prosseguir, utilizando a base  $[\Phi_2]$ , até o instante final  $t_2$ .

Caso a análise utilize mais de duas bases é necessário a construção das matrizes de transformação de coordenadas  $[\Omega]$  para cada instante de mudança de base, de forma similar à exposta.

Finalmente é importante ressaltar que o procedimento de mudança de base proposto não necessita que as bases envolvidas na análise sejam formadas por igual número de vetores de Ritz-Wilson.

#### VI.4 Resposta em Regime Permanente

O processo descrito no item anterior permite a obtenção da resposta modal transiente com mudança de base. A obtenção da resposta em regime permanente, utilizando o procedimento proposto por VELETOS e KUMAR [2], descrito no capítulo V, é feita adicionando-se uma correção à resposta transiente calculada no domínio do tempo.

Na análise dinâmica de um sistema estrutural submetido a um carregamento periódico genérico, utilizando a metodologia de mudança de base, é evidente que a mesma base que atende ao instante  $t = 0$ , inicial da análise, atenderá ao instante  $t = T$ , onde  $T$  é o período do carregamento. Esta afirmativa é decorrente da constatação que em regime permanente não só o carregamento será igual nestes dois instantes como também todos os movimentos nodais.

Partindo-se desta observação é possível o estabelecimento de uma metodologia bastante simples para a obtenção da *resposta corretiva* que deve ser acrescentada à resposta transiente modal, para a determinação da resposta em regime permanente.

Novamente, para simplicidade e melhor visualização das demonstrações, será utilizado um exemplo genérico em que são empregadas duas bases para solução. A base  $[\Phi_1]$  é utilizada no intervalo de tempo que vai de  $t_0 = 0$  até  $t_1$ , a segunda base de Ritz-Wilson, contida em  $[\Phi_2]$ , é utilizada de  $t_1$  até  $t_2$  e, finalmente, a base  $[\Phi_1]$  volta a ser utilizada para o cálculo da resposta entre  $t_2$  e  $t_3 = T$ .

A resposta corretiva é definida pela expressão (V.2) como :

$$z_1(t) = r_1(t).z_1(0) + v_1(t).\dot{z}_1(0) \quad (\text{VI.7})$$

para cada equação modal e cujas as incógnitas que devem ser determinadas são  $z(0)$  e  $\dot{z}(0)$ .

O cálculo de  $\{z_1(0)\}$  e  $\{\dot{z}_1(0)\}$ , que são os vetores formados pelas incógnitas  $z_1(0)$  e  $\dot{z}_1(0)$  que atendem a base  $[\Phi_1]$ , pode ser feito de forma direta, utilizando o procedimento descrito no capítulo V, empregando-se na equação (V.6) os seguintes valores :

$$\{\Delta x_1\} = \{x_1(0)\} - \{x_1(T)\} \quad (\text{VI.8})$$

$$\{\Delta \dot{x}_1\} = \{\dot{x}_1(0)\} - \{\dot{x}_1(T)\}$$

A partir da definição de  $\{z_1(t)\}$ , utilizando-se a expressão (VI.7), chega-se a resposta modal em regime permanente da região pertinente a base  $[\Phi_1]$ , definida por :

$$\{y_1(t)\} = \{x_1(t)\} + \{z_1(t)\} \quad (\text{VI.9})$$

A definição da resposta corretiva para a outra base é feita a partir da premissa que a resposta final possa tanto ser expressa por  $[\Phi_1]$  como por  $[\Phi_2]$  no instante de transição  $t_1$ . Portanto, temos que :

$$\{u(t_1)\} = [\Phi_1]\{y_1(t_1)\} = [\Phi_2]\{y_2(t_1)\} \quad (\text{VI.10})$$

ou

$$\{y_2(t_1)\} = [\Omega_{21}]\{y_1(t_1)\}$$

onde a matriz  $[\Omega_{21}]$  foi definida em (VI.5).

Utilizando a expressão (V.1) para expandir (VI.10), temos :

$$\{x_2(t_1)\} + \{z_2(t_1)\} = [\Omega_{21}]\{x_1(t_1)\} + [\Omega_{21}]\{z_1(t_1)\} \quad (\text{VI.11})$$

onde  $\{x_1\}$  e  $\{x_2\}$  são as respostas transientes modais e  $\{z_1\}$  e  $\{z_2\}$  são as respostas corretivas para as bases  $[\Phi_1]$  e  $[\Phi_2]$ , respectivamente.

Partindo-se da premissa estabelecida para mudança de base,  $\{x_2(t_1)\} = [\Omega_{21}]\{x_1(t_1)\}$ , temos :

$$\{z_2(t_1)\} = [\Omega_{21}]\{z_1(t_1)\} \quad (\text{VI.12})$$

Como cada elemento do vetor  $\{z_2(t)\}$  é expresso por :

$$z_{21}(t) = r_{21}(t).z_{21}(0) + v_{21}(t).\dot{z}_{21}(0) \quad (\text{VI.13})$$

a igualdade (VI.12) permite o cálculo das constantes  $z_{21}(0)$  e  $\dot{z}_{21}(0)$  a partir da solução do sistema de equações para cada coordenada modal  $i$  da base  $[\Phi_2]$ , definido por :

$$\begin{bmatrix} r_{21}(t_1) & v_{21}(t_1) \\ \dot{r}_{21}(t_1) & \dot{v}_{21}(t_1) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} z_{21}(0) \\ \dot{z}_{21}(0) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} z_{21}(t_1) \\ \dot{z}_{21}(t_1) \end{Bmatrix} \quad (\text{VI.14})$$

Efetuada o cálculo da resposta corretiva no instante  $t=0$  para a base  $[\Phi_2]$  é possível, empregando-se a expressão (VI.13), determinar a resposta de correção  $\{z_2(t)\}$ . A

resposta em regime permanente do intervalo de tempo que vai de  $t_1$  até  $t_2$  pode finalmente ser calculada utilizando-se :

$$\{y_2(t)\} = \{x_2(t)\} + \{z_2(t)\} \quad (\text{VI.15})$$

O procedimento para o cálculo da resposta em regime permanente para análises que utilizem mais de duas bases é similar ao exposto anteriormente. Acha-se a resposta corretiva para a primeira base e depois, para cada instante de mudança de base  $t_j$  utiliza-se a igualdade definida em (VI.12), expressa de forma genérica por :

$$\{z_k(t_j)\} = [\Omega_{kj}]\{z_j(t_j)\} \quad (\text{VI.16})$$

onde  $[\Omega_{kj}]$  é a matriz de transformação de coordenadas da base  $[\Phi_j]$  para a base  $[\Phi_k]$ , sendo a primeira pertinente à faixa de tempo até o instante  $t_j$  e a segunda válida para análise depois de  $t_j$ .  $\{z_j(t)\}$  e  $\{z_k(t)\}$  são as respostas corretivas a serem aplicadas nos instantes cuja resposta transiente foi calculada utilizando-se  $[\Phi_j]$  e  $[\Phi_k]$ , respectivamente.

## VI.5 Comentários

O procedimento de análise utilizando-se mudança de base exposto acima tem como premissa que nos instantes de transição a resposta dinâmica final consiga ser expressa

tanto pela base anterior como pela base posterior. Isto significa que o grau de ortogonalidade entre bases subseqüentes na análise deve ser pequeno. Caso ocorra que uma base de transformação seja completamente ortogonal a base anterior, que resultará numa matriz de transformação  $[\Omega]$  nula, não ocorrerá transferência da resposta de um período de análise para o outro, o que poderá acarretar erros de truncamento na análise. Este fato indica a necessidade da geração de uma nova base intermediária entre as duas originais, possibilitando a transição da resposta.

O procedimento descrito a seguir serve para avaliação destes erros no instante de mudança da base  $[\Phi_1]$  para  $[\Phi_j]$ . Pela equação (VI.6) temos que :

$$\{x_j(t_1)\} = [\Omega_{j1}]\{x_1(t_1)\} \quad (\text{VI.17})$$

podemos então definir :

$$\{\hat{x}_1(t_1)\} = [\Omega_{j1}]^T \{x_j(t_1)\} \quad (\text{VI.18})$$

$$\{\hat{x}_1(t_1)\} = [\Omega_{j1}]^T [\Omega_{j1}] \{x_1(t_1)\}$$

a mudança de base não acarretará erros de truncamento quando :

$$\{\hat{x}_1(t_1)\} \cong \{x_1(t_1)\} \quad (\text{VI.19})$$

## Capítulo VII

### ENRIQUECIMENTO DA BASE

#### VII.1 Introdução

O procedimento de mudança de base que será apresentado neste capítulo, denominado de *Enriquecimento da Base*, mostra-se bastante eficiente no tratamento da análise dinâmica de estruturas sujeitas a carregamentos que apresentem defasagem de tempo entre as cargas aplicadas nos diversos pontos ao longo da estrutura, como ocorre nos casos de carga decorrentes de estados de mar em estruturas marítimas. Neste tipo de carregamento a principal dificuldade é a determinação de uma base de Ritz-Wilson que consiga representar, de forma adequada, as componentes da carga e da resposta pertinentes aos modos de alta frequência da estrutura, para todo o tempo de análise.

Este segundo procedimento tem por objetivo a incorporação de sucessivos vetores na base de Ritz-Wilson gerada para um determinado instante característico da análise. Os vetores que serão incorporados à base original são responsáveis pela *correção estática* para os outros instantes da análise, de forma que a base enriquecida possa atender a todo o intervalo de integração.



A principal diferença entre este procedimento e o apresentado no capítulo anterior, portanto, é que ao invés da utilização de mais de uma base para o período de integração, obrigando a efetuação da projeção das respostas modais obtidas entre os subespaços definidos pelas diversas bases utilizadas, é empregada apenas uma única base para todo o intervalo de integração, sendo que sobre esta única base são efetuadas as mudanças sucessivas.

## VII.2 Procedimento de Análise

O procedimento para *Enriquecimento da Base* é resumido nos seguintes passos :

### a. *Geração da Base Inicial* :

A base inicial pode ser gerada a partir do carregamento atuante tanto no instante de carga máxima como em outro instante característico qualquer da análise, como o de cortante máximo ou de momento de tombamento máximo na base de uma estrutura do tipo jaqueta. Este instante é denominado  $t_g$  e é o mesmo definido no capítulo anterior para a determinação da base principal naquele procedimento de mudança de base. Esta base é gerada utilizando-se o Algoritmo A2, apresentado na tabela III.2, substituindo-se o passo c. *Determinação do primeiro vetor de Ritz-*

Wilson pelas expressões apresentadas em (VI.2).

b. *Determinação da Resposta Transiente :*

A resposta transiente é calculada para o primeiro ciclo de excitação utilizando-se a base de Ritz-Wilson gerada. A qualidade da resposta obtida é avaliada através do monitoramento do resíduo normalizado  $Er(t)$  no equilíbrio das equações dinâmicas, equacionado no item III.6.

Caso o resíduo esteja, para todo o intervalo de integração, abaixo da tolerância especificada, a resposta pode ser considerada satisfatória e a análise pode ser continuada com a determinação da resposta em regime permanente e o cálculo dos deslocamentos nodais, das tensões e dos esforços nos elementos estruturais componentes do modelo.

Até este ponto o procedimento é exatamente igual ao descrito no capítulo anterior.

Quando o resíduo é maior que a tolerância especificada a base de Ritz-Wilson utilizada deverá ser modificada seguindo-se a metodologia descrita no próximo passo.

c. *Enriquecimento da base de Ritz-Wilson :*

A base de Ritz-Wilson, empregada na análise, é modificada pela inclusão de mais um vetor, que é definido para a representação das componentes de alta frequência do carregamento atuante no instante que apresentou o máximo resíduo  $E_r(t)$  no passo anterior.

Com esta nova base volta-se ao passo b, e é refeita a análise para todo o intervalo de integração com uma nova avaliação dos resíduos e a determinação da necessidade ou não da incorporação de um novo vetor na base. Os resíduos  $E_r(t)$  encontrados para cada instante da nova análise são obrigatoriamente menores que os da análise anterior, haja visto que os vetores utilizados na análise anterior continuam presentes na nova base.

### VII.3 Modificação da Base Inicial

O enriquecimento sucessivo da base de Ritz-Wilson empregado na solução do problema dinâmico é feito através da inclusão de um novo vetor, gerado a cada iteração da análise. Este novo vetor será o responsável, dentro da base utilizada, pela incorporação das componentes de alta frequência do carregamento atuante no instante que apresentou o máximo resíduo no cálculo da resposta transiente da iteração anterior. Este instante está sendo

denominado *tr* no algoritmo A5, destinado à atualização da base e que é apresentado na tabela VII.1.

O algoritmo de inclusão de mais um vetor na base pode efetuar algumas pequenas modificações nos últimos vetores da base inicial, na operação de ortogonalização da nova base em relação a matriz de rigidez  $[K]$ .

## ALGORITMO A5 - Modificação da Base Inicial

=====

a. Dados :

Carregamento no instante  $t_r$  :  $\{p(t_r)\}$ Base anterior :  $[\Phi_A] = [\{\Phi_1\} \{\Phi_2\} \dots \{\Phi_{r-1}\} \{\Phi_r\}]$ b. Incorporação do vetor para o instante  $t_r$ :

$$[K]\{\tilde{q}\} = \{p(t_r)\}$$

b.1 ortogonalização com a base anterior :

$$c_j = \{\tilde{q}\}^T [M] \{\Phi_j\}, \text{ para } j = 1 \rightarrow r$$

$$\{\hat{q}\} = \{\tilde{q}\} - \sum_{j=1}^r c_j \cdot \{\Phi_j\}$$

b.2 [M]-normalização :

$$\beta_1 = \sqrt{(\{\hat{q}\}^T [M] \{\hat{q}\})}$$

$$\{q\} = 1/\beta_1 \cdot \{\hat{q}\}$$

c. Ortogonalização dos vetores de Ritz-Wilson em relação

a matriz de rigidez  $[K]$  :

c.1 formação da matriz de rigidez reduzida :

$$[K_r] = [Q]^T [K] [Q]$$

$$\text{onde } [Q] = [\{\Phi_1\} \{\Phi_2\} \dots \{\Phi_r\} \{q\}]$$

c.2 solução do problema de autovalor reduzido :

$$[K_r][Z] = [Z][\Lambda] \quad \text{sendo } [Z] (r+1) \times (r+1)$$

d. Base modificada :

$$[\Phi_M] = [Q][Z]$$

=====

#### VII.4 Comentários

O procedimento de *Enriquecimento da Base* proposto é notadamente mais simples que o procedimento de *Mudança de Base* apresentado no capítulo anterior. A sua implementação numérica é imediata, haja visto que necessita apenas do algoritmo A5, apresentado na tabela VII.1 e não requer nenhuma modificação nos procedimentos de integração da resposta dinâmica no domínio do tempo e do cálculo da resposta em regime permanente.

Outra vantagem deste segundo procedimento sobre o anterior é a possibilidade da aplicação direta dos métodos de subestruturação por síntese de componentes modais [9,10] na determinação das respostas dinâmicas de grandes sistemas estruturais.

Como nota final é ressaltado que a utilização do algoritmo A5 para a inclusão de um perfil de carregamento que já esteja representado dentro da base utilizada no problema pode levar a geração de um vetor espúrio, que é caracterizado por um fator de participação de carga nulo ou por uma frequência com valor muito abaixo da associada ao primeiro vetor da base original.

## Capítulo VIII

### APLICAÇÕES NUMÉRICAS

#### VIII.1 Introdução

Neste capítulo são apresentados os exemplos numéricos que foram analisados com o objetivo de demonstrar a aplicabilidade das propostas e conceitos contidos neste trabalho. O primeiro exemplo apresentado é a solução de um problema de grande simplicidade, composto por apenas um grau de liberdade e com resposta conhecida. As demais aplicações utilizam o modelo de uma estrutura do tipo jaqueta, de pequeno porte, com 336 graus de liberdade e com características dinâmicas semelhantes às de estruturas reais do mesmo tipo.

Os exemplos iniciais demonstram a utilização conjunta do método de Ritz-Wilson e da técnica de integração da resposta em regime permanente, proposta por VELETOS e KUMAR [2]. Os últimos exemplos são aplicações das metodologias de mudança de base.

Todos os algoritmos desenvolvidos neste trabalho foram implementados como módulos independentes no sistema computacional *SAECHIP* [15], destinado à análise estrutural com a aplicação do método dos elementos finitos.

## VIII.2 Exemplo *SERRA*

O primeiro exemplo numérico, denominado *SERRA*, apresenta a solução da resposta dinâmica de um sistema massa-mola não amortecido, submetido a uma carga periódica em forma de dente de serra. A resposta obtida utilizando os algoritmos implementados neste trabalho é comparada com a fornecida por PAZ [16], obtida a partir da decomposição da carga em uma série de Fourier.

O sistema massa-mola utilizado possui as seguintes propriedades :

- Rigidez  $K = 2000 \text{ kN/m}$
- Massa  $M = 20 \text{ ton}$
- Freqüência Natural  $w = 10 \text{ rad/s}$

A carga que foi aplicada ao sistema é apresentada na figura VIII.2a e é definida no intervalo  $[0, T]$  por :

$$P(t) = \frac{P_o}{T} t$$

sendo :      Amplitude  $P_o = 100 \text{ kN}$   
                  Período da carga  $T = 1,6 \text{ seg}$

A freqüência de excitação  $\tilde{w}$  é dada por :

$$\tilde{w} = 2\pi/T = 3,93 \text{ rad/seg.}$$



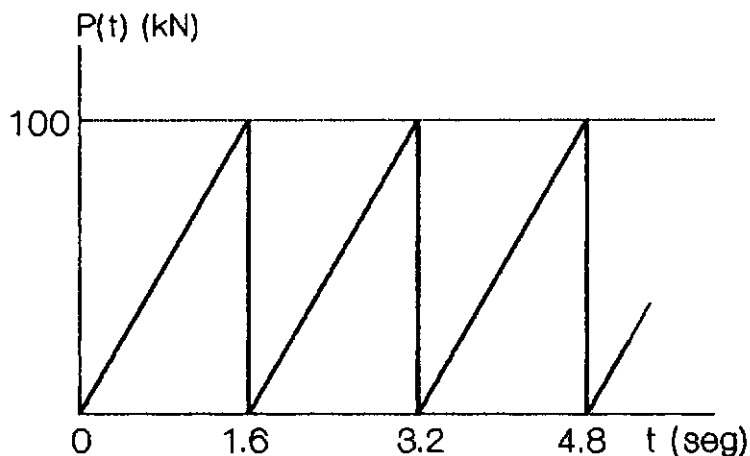


Figura VIII.2a Carga periódica aplicada ao sistema massa-mola

A resposta fornecida por PAZ é definida por :

$$u(t) = \frac{P_0}{2K} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{P_0 \cdot \text{sen}(n \cdot \tilde{\omega} \cdot t)}{n \cdot \pi \cdot K(1 - r_n^2)}$$

onde  $r_n = n \cdot \tilde{\omega} / \omega$ .

A comparação dos resultados obtidos é apresentada tanto na tabela VIII.2 como também, de forma gráfica, na figura VIII.2b. Nas duas comparações são utilizados os seguintes rótulos para identificação das respostas :

- M PAZ : Resposta fornecida por PAZ [16].
- REG PERM : Resposta obtida utilizando-se a estratégia de integração direta da resposta em regime permanente, proposta em [2].

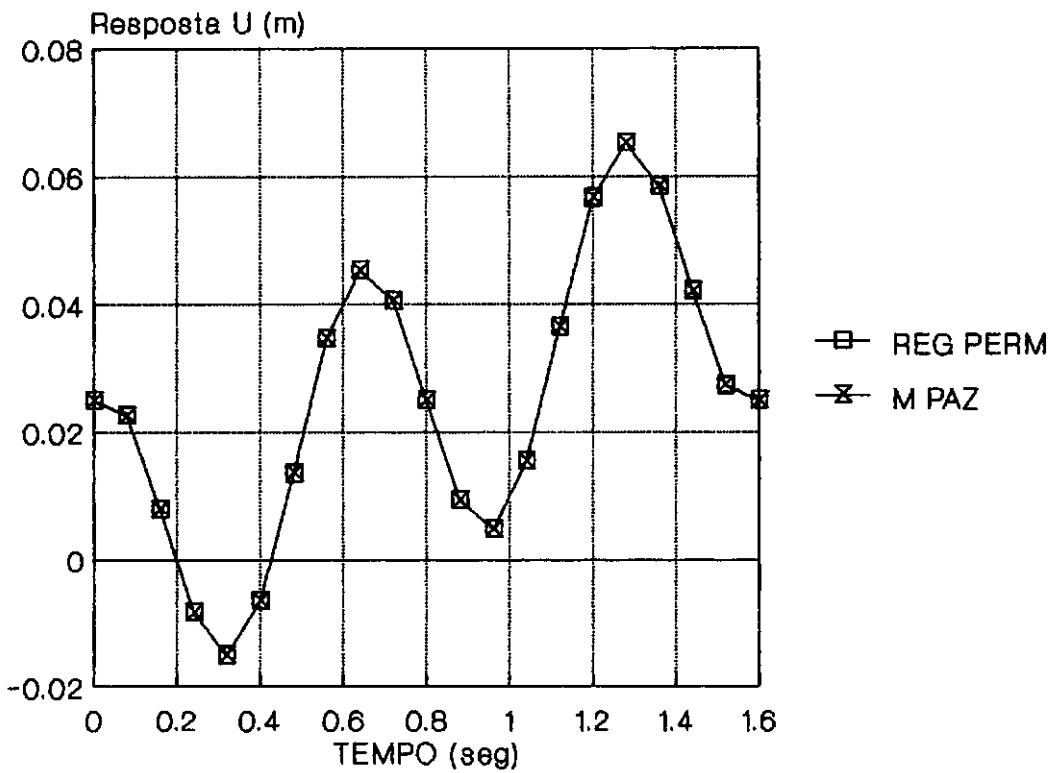


Figura VIII.2b Comparação das respostas

t (seg)	Resposta U (m)	
	M PAZ	REG PERM
0.00	0.0250	0.0250
0.16	0.0078	0.0079
0.32	-0.0152	-0.0152
0.48	0.0135	0.0135
0.64	0.0452	0.0453
0.80	0.0250	0.0250
0.96	0.0048	0.0047
1.12	0.0365	0.0365
1.28	0.0652	0.0652
1.44	0.0422	0.0421
1.60	0.0250	0.0250

Tabela VIII.2

### VIII.3 Modelo *JAQUETA*

O modelo estrutural de uma plataforma fixa simplificada, denominado *JAQUETA* e apresentado na figura VIII.3a, será utilizado nas demais aplicações numéricas contidas neste trabalho. O modelo é composto por elementos de viga e foi elaborado visando reproduzir, aproximadamente, as mesmas características dinâmicas concernentes à distribuição de massas e rijezas de uma estrutura real do mesmo tipo.

A estrutura *JAQUETA* possui 4 pernas, com inclinação real de  $1/8,5$  e é formada por seis mesas quadradas, locadas nas elevações apresentadas na tabela abaixo. A linha d'água está na elevação 0.000.

ELEVAÇÃO (mm)	DIMENSÃO (mm x mm)
+12.000	32.000 x 32.000
-12.000	35.272 x 35.272
-38.000	38.818 x 38.818
-64.000	42.364 x 42.364
-90.000	45.910 x 45.910
-120.000	50.000 x 50.000

Tabela VIII.3a Elevação e dimensão das mesas

Na elevação +30.000 mm foi modelada uma mesa adicional para representação da correta elevação da massa referente ao convés e às facilidades de produção. As pernas foram extendidas até a elevação -150.000 mm para a modelagem

simplificada da rigidez proporcionada pelo estaqueamento. Os nós desta elevação foram modelados como engastados. As faces e as mesas são contraventadas, conforme é mostrado na figura VIII.3a e todos os elementos que compõem o modelo são tubos com as seguintes propriedades geométricas :

POSIÇÃO	DIÂMETRO EXTERNO (mm)	ESPESSURA (mm)
PERNAS	2.000	50
MESAS	900	30
CONTRAVENTAMENTOS	900	30

Tabela VIII.3b Dimensões dos elementos

e com as seguintes propriedades elásticas :

Módulo de Elasticidade = 200.000.000 kN/m<sup>2</sup>

Coeficiente de Poisson = 0,30

A massa total é de 20240 ton, sendo 10000 ton distribuídas como massas nodais nos quatro nós da elevação 30.000 mm, representando a massa do convés e das facilidades e 10240 ton distribuídas ao longo da estrutura, tendo sido considerada a densidade dos elementos igual a 20,8 ton/m<sup>3</sup>.

A primeira frequência natural da estrutura é de 1,36 rad/seg correspondente ao período natural de 4,6 seg.

## - Principais Dados

## Elevações e dimensões :

+30000	- 32,0x32,0 m
+12000	- 32,0x32,0 m
-12000	- 35,3x35,3 m
-38000	- 38,8x38,8 m
-64000	- 42,4x42,4 m
-90000	- 45,9x45,9 m
-120000	- 50,0x50,0 m
-150000	- 54,1x54,1 m

## Dimensões dos tubos :

Pernas	: 2000x50 mm
Mesas	: 900x30 mm
Contr.	: 900x30 mm

## Massa :

Estrutura	: 10240 ton
Convés	: 10000 ton
Total	: 20240 ton

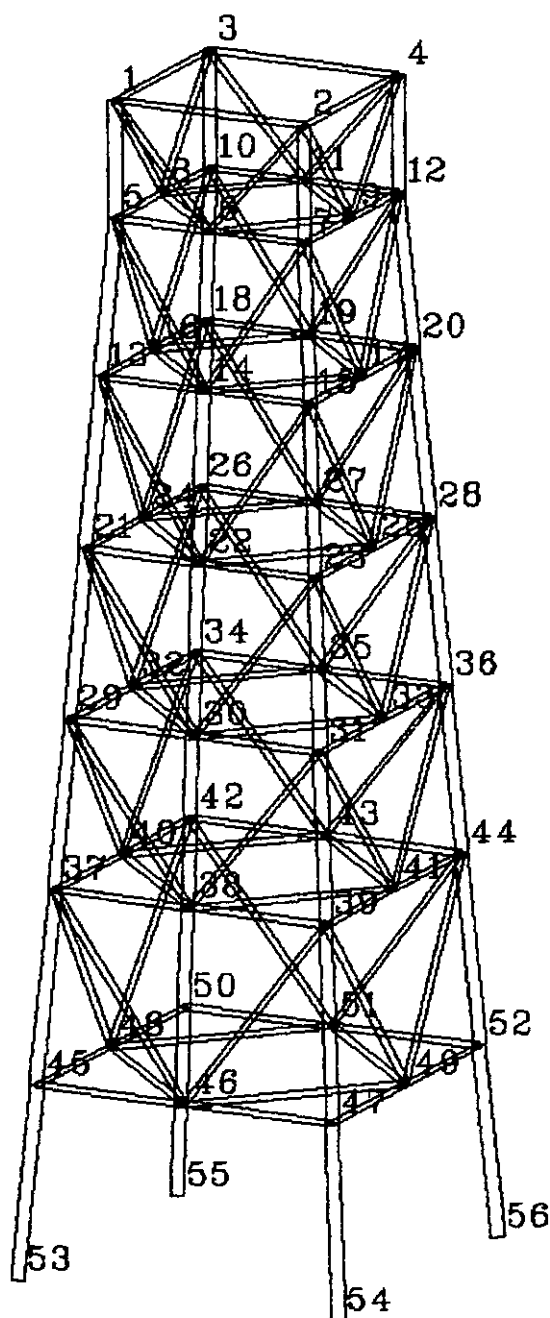


Figura VIII.3a Modelo *JAQUETA* com a numeração dos nós

#### VIII.4 Exemplo *JAQSEN*

Na segunda análise que serve de exemplo para este trabalho foram aplicadas cargas periódicas senoidais, não defasadas, no modelo *JAQUETA*. Os resultados obtidos utilizando-se a estratégia de integração direta da resposta em regime permanente são comparados com as respostas obtidas pela integração direta das equações de movimento no domínio do tempo, utilizando-se o método de Wilson- $\theta$ . Este método foi implementado como um módulo do *SAECHIP* [15] seguindo-se o procedimento apresentado por BATHE, WILSON e PETERSON [17].

O carregamento dinâmico considerado foi formado por cargas nodais, na direção X, aplicadas nas pernas do modelo *JAQUETA* e definidas pela seguinte expressão :

$$P_i(t) = F_i \cdot \text{sen} (2.\pi.t / T)$$

onde  $T$  é o período de excitação. Neste exemplo foi utilizado  $T = 10$  seg, que corresponde a frequência de excitação  $\tilde{\omega} = 0,6283$  rad/seg, que é menor que a primeira frequência natural da estrutura e, portanto, bem representada dinamicamente pela base de Ritz-Wilson utilizada.

As amplitudes  $F_i$  são apresentadas na tabela VIII.4a, para cada elevação do modelo.

Elevação (mm)	Nós	Amplitude $F_i$	Total na Elevação
-12000	13	3750 kN	15000 kN
	15	3750 kN	
	18	3750 kN	
	20	3750 kN	
-38000	21	2250 kN	9000 kN
	23	2250 kN	
	26	2250 kN	
	28	2250 kN	
-64000	29	1000 kN	4000 kN
	31	1000 kN	
	34	1000 kN	
	36	1000 kN	
-90000	37	500 kN	2000 kN
	39	500 kN	
	42	500 kN	
	44	500 kN	
$\Sigma = 30000 \text{ kN}$			

Tabela VIII.4a Amplitudes das cargas

A base de Ritz-Wilson gerada para a transformação de coordenadas é formada por 7 vetores com as seguintes características:

Vetor	Frequência (rad/seg)	Período (seg)	Fator	Massa Efetiva		
				X	Y	Z
1	1,358	4,625	0,122	0,97	0,00	0,00
2	3,752	1,674	0,066	0,01	0,00	0,00
3	13,602	0,462	0,249	0,00	0,00	0,00
4	19,001	0,331	0,045	0,00	0,00	0,00
5	24,554	0,256	0,085	0,00	0,00	0,00
6	42,896	0,146	0,083	0,00	0,01	0,00
7	76,447	0,082	0,290	0,00	0,01	0,00
$\Sigma =$			0,939	0,98	0,02	0,00

Tabela VIII.4b Base de Ritz-Wilson

onde a coluna denominada *Fator* apresenta os fatores de participação de carga para cada vetor da base escolhida.

O amortecimento foi definido como de 5% do amortecimento crítico na análise pelo método de Ritz-Wilson e, na solução pelo método de Wilson- $\theta$ , a matriz de amortecimento foi definida como  $[C] = \alpha.[M] + \beta.[K]$ , sendo  $\alpha = 0,136$  e  $\beta = 0$ . Nas duas análises foi utilizado o mesmo incremento de tempo, igual a 0,125 seg.

#### - Resultados :

Na análise feita pelo método de Ritz-Wilson o resíduo no equilíbrio das equações dinâmicas, calculado conforme o procedimento definido no item III.6, foi praticamente nulo para todo o intervalo de integração.

Os resultados que serão apresentados referem-se aos deslocamentos do nó número 1, que fica no topo do modelo *JAQUETA*, e aos esforços internos dos seguintes elementos :

Elemento	Tipo	Incidências	Elevações
20	Perna	42	-90000 mm
		50	-120000 mm
50	Mesa	16	-12000 mm
		18	-12000 mm
107	Diagonal	13	-12000 mm
		24	-38000 mm

Tabela VIII.4c Elementos comparados



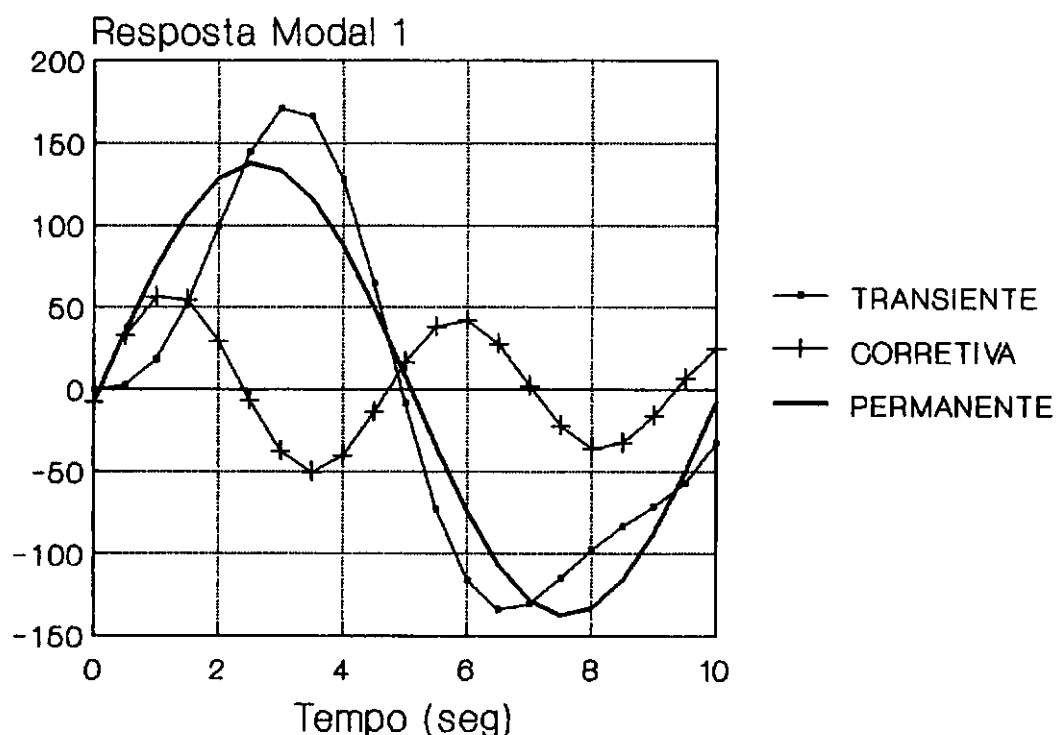


Figura VIII.4a Respostas para o primeiro ciclo de excitação

O gráfico da figura VIII.4a apresenta a resposta transiente, a resposta em regime permanente e a correção aplicada à resposta transiente, utilizando o procedimento de VELETOS e KUMAR [2], para a equação desacoplada pertinente ao primeiro vetor da base.

Em todas as tabelas e gráficos são utilizados os seguintes rótulos de identificação :

- REG PERM : Resposta em regime permanente utilizando os algoritmos apresentados neste trabalho.
- WILSON-T : Resposta obtida pelo método de Wilson- $\theta$  na integração do décimo ciclo de excitação.

As tabelas VIII.4d e VIII.4e mostram a comparação das respostas máximas em módulo obtidas pelos dois métodos de análise empregados.

Deslocamentos Máximos em Regime Permanente

	Direção	WILSON-T	REG PERM	Dif. %
Nó 1	DX	1,00081	0,99889	0,2 %
	DZ	0,00694	0,00693	0,1 %

Tabela VIII.4d

unidade : m

Esforços Máximos em Regime Permanente

	Elemento Esforços (Nó)	WILSON-T	REG PERM	Dif. %
20 (42) perna	AX	0,377E5	0,377E5	-
	QY	0,906E1	0,904E1	-0,2 %
	QZ	0,310E4	0,310E4	-
	MX	0,984E2	0,982E2	-0,2 %
	MY	0,203E5	0,202E5	-0,5 %
	MZ	0,999E2	0,997E2	-0,2 %
50 (16) mesa	AX	0,114E4	0,113E4	-0,9 %
	QY	0,171E1	0,169E1	-1,2 %
	QZ	0,186E2	0,185E2	-0,5 %
	MX	0,350E0	0,344E0	-1,7 %
	MY	0,867E2	0,864E2	-0,4 %
	MZ	0,792E1	0,787E1	-0,6 %
107 (13) diagonal	AX	0,771E4	0,769E4	-0,3 %
	QY	0,291E1	0,290E1	0,3 %
	QZ	0,761E1	0,760E1	-0,1 %
	MX	0,101E1	0,100E1	-1,0 %
	MY	0,736E2	0,736E2	-
	MZ	0,232E1	0,231E1	0,4 %

Tabela VIII.4e

unidades : kN e kN.m

Os gráficos das figuras VIII.4b e VIII.4c mostram, respectivamente, a comparação entre as respostas obtidas para deslocamento na direção X do nó 1 e dos esforços axiais para as barras 20, 50 e 107.

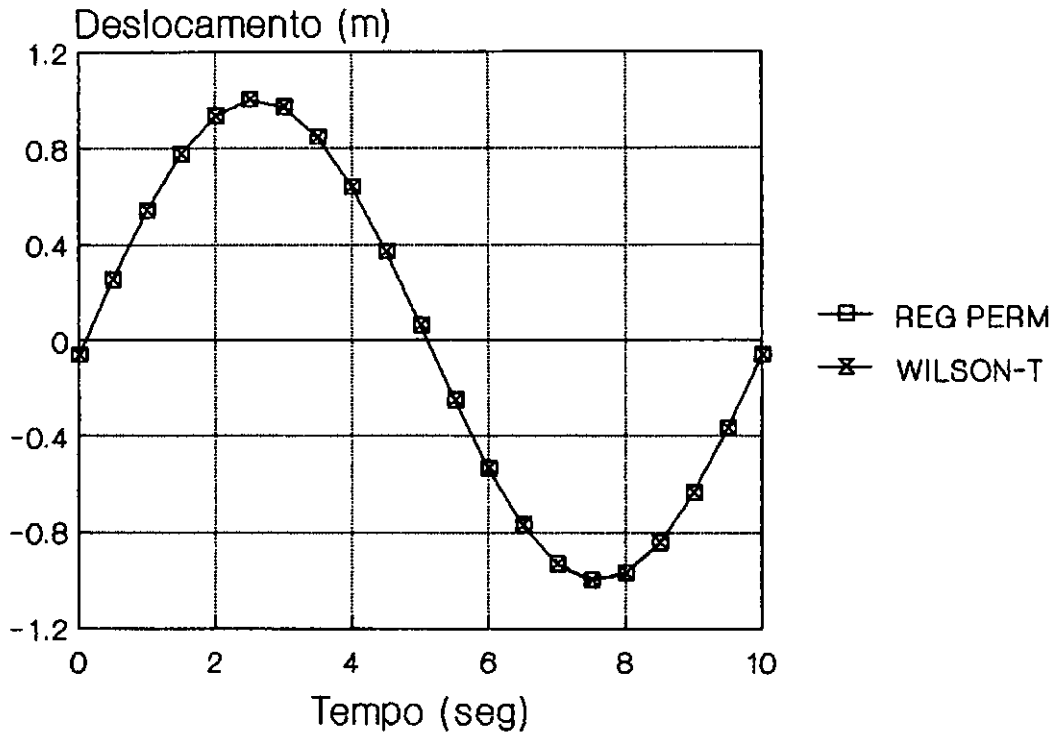


Figura VIII.4b Deslocamento X - Nó 1 (el +30000 mm)

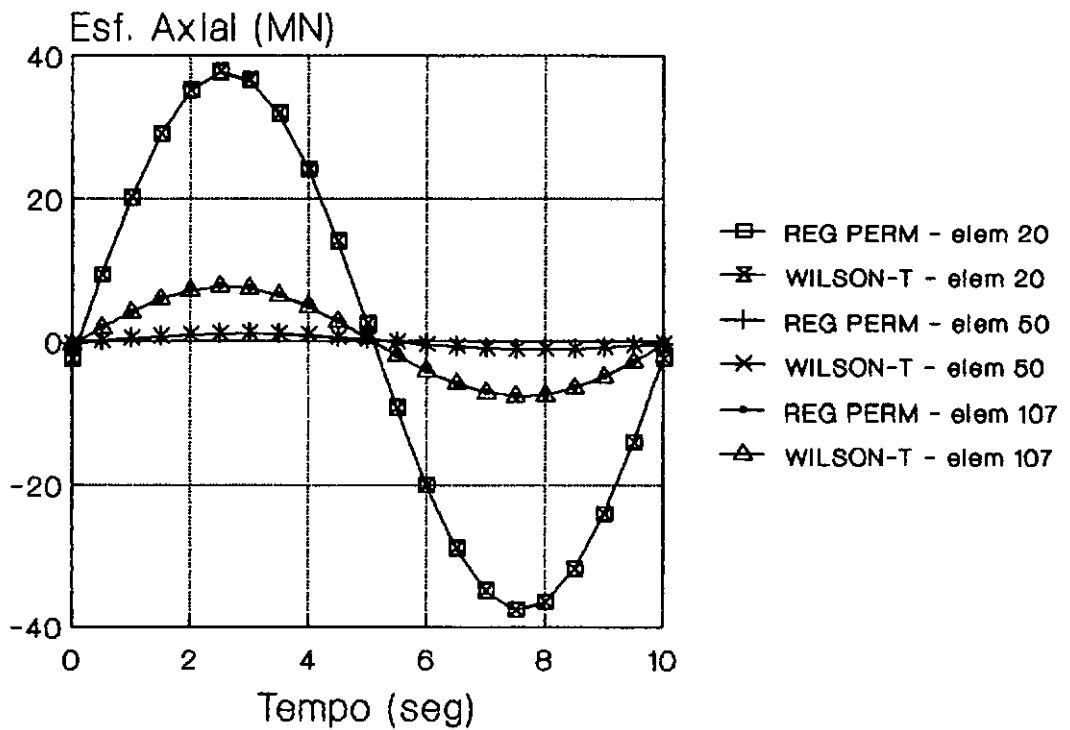


Figura VIII.4c Esforço Axial para os elementos 20 (perna), 50 (mesa) e 107 (diagonal)

- *Comentários :*

Os resultados obtidos pelo algoritmo da integração direta da resposta em regime permanente apresentam concordância com os encontrados na integração do décimo ciclo de excitação pelo método de Wilson- $\theta$ , conforme pode ser observado nas tabelas e gráficos apresentados. Esta concordância ocorre tanto para resultados globais como para os resultados localizados, tais como os esforços em um dos tubos da mesa da elevação - 12000 mm. Os incrementos de tempo utilizados nas duas análises foram idênticos e suficientemente pequenos, na ordem de  $1/40$  do primeiro período natural da estrutura, para que não ocorressem erros devidos à falta de convergência nos algoritmos de integração no domínio do tempo.

Os autovetores do problema reduzido, definido no passo e do Algoritmo A2 do item III.4, são apresentados na tabela abaixo, qualificando os primeiros três vetores da base de Ritz-Wilson utilizada neste exemplo como boas aproximações de modos de vibração da estrutura.

{Z <sub>1</sub> }	{Z <sub>2</sub> }	{Z <sub>3</sub> }	{Z <sub>4</sub> }	{Z <sub>5</sub> }	{Z <sub>6</sub> }	{Z <sub>7</sub> }
1,00	-0,10	0,01	0,00	0,00	0,00	0,00
0,10	0,98	-0,17	0,04	-0,03	0,01	-0,01
0,00	0,18	0,94	-0,21	0,18	-0,06	0,04
0,00	0,00	0,28	0,55	-0,70	0,30	-0,19
0,00	0,00	0,06	0,69	0,21	-0,54	0,44
0,00	0,00	0,01	0,43	0,64	0,37	-0,53
0,00	0,00	0,00	0,05	0,15	0,69	0,70

Tab VIII.4f Autovetores do problema reduzido

### VIII.5 Exemplo *JAQSER*

Neste terceiro exemplo, denominado *JAQSER*, o modelo *JAQUETA* foi submetido a um carregamento não harmônico, em forma de dente de serra, definido pela expressão :

$$\{p(t)\} = \{f(s)\}.g(t)$$

onde o vetor de amplitudes  $\{f(s)\}$  foi o mesmo definido para o exemplo *JAQSEN*, anterior a este, e a função periódica  $g(t)$ , com  $T = 10$  seg, é apresentada no gráfico da figura VIII.5a.

O objetivo deste exemplo é apresentar o desempenho do algoritmo de integração direta da resposta em regime permanente para carregamentos não harmônicos. Todos os dados utilizados foram idênticos aos do exemplo *JAQSEN*, com exceção da função periódica  $g(t)$ .

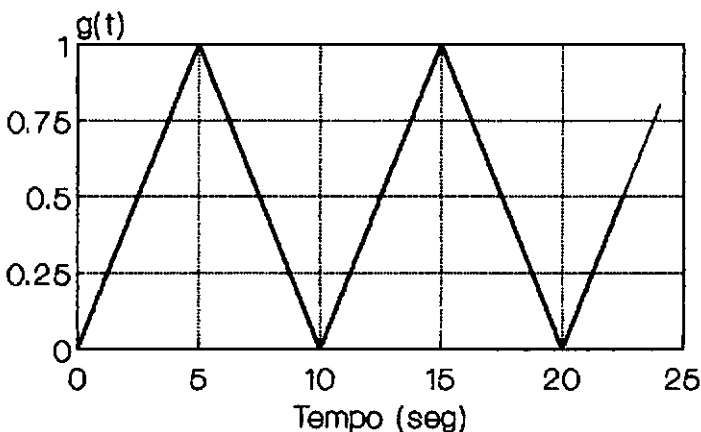


Figura VIII.5a Função periódica  $g(t)$

- Resultados :

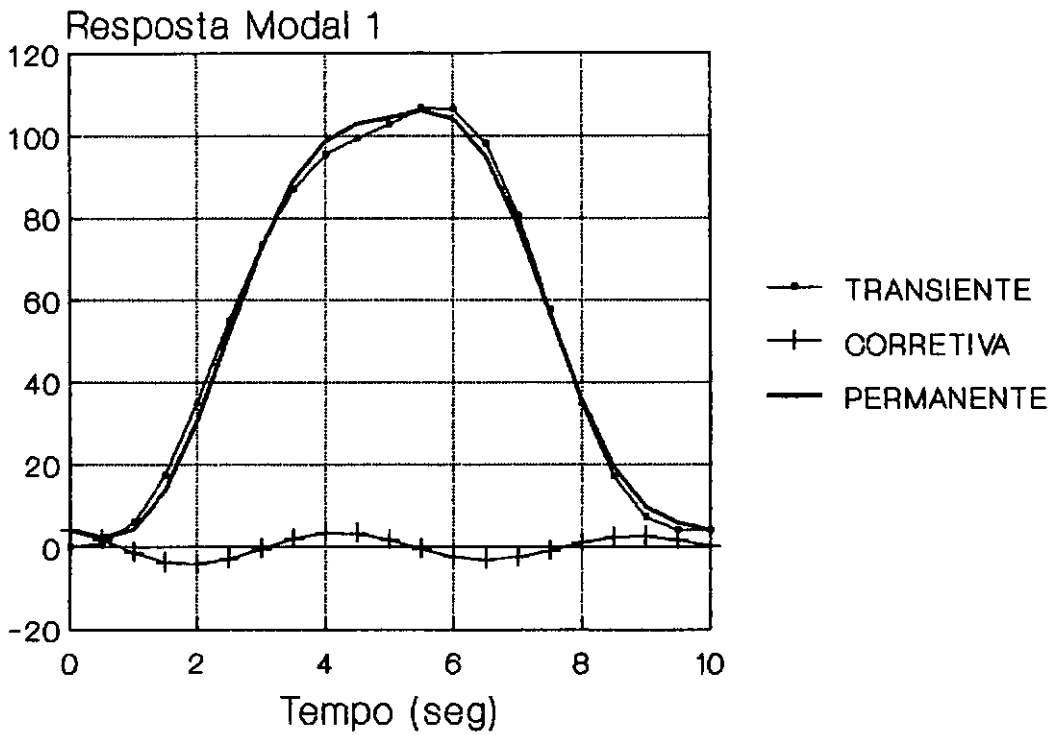


Figura VIII.5b Respostas para o primeiro ciclo de excitação da equação modal 1

Deslocamentos Máximos em Regime Permanente

	Direção	WILSON-T	REG PERM	Dif. %
Nó 1	DX	0,7624	0,7607	0,2 %
	DZ	0,0106	0,0103	2,8 %

Tabela VIII.5a

unidade : m

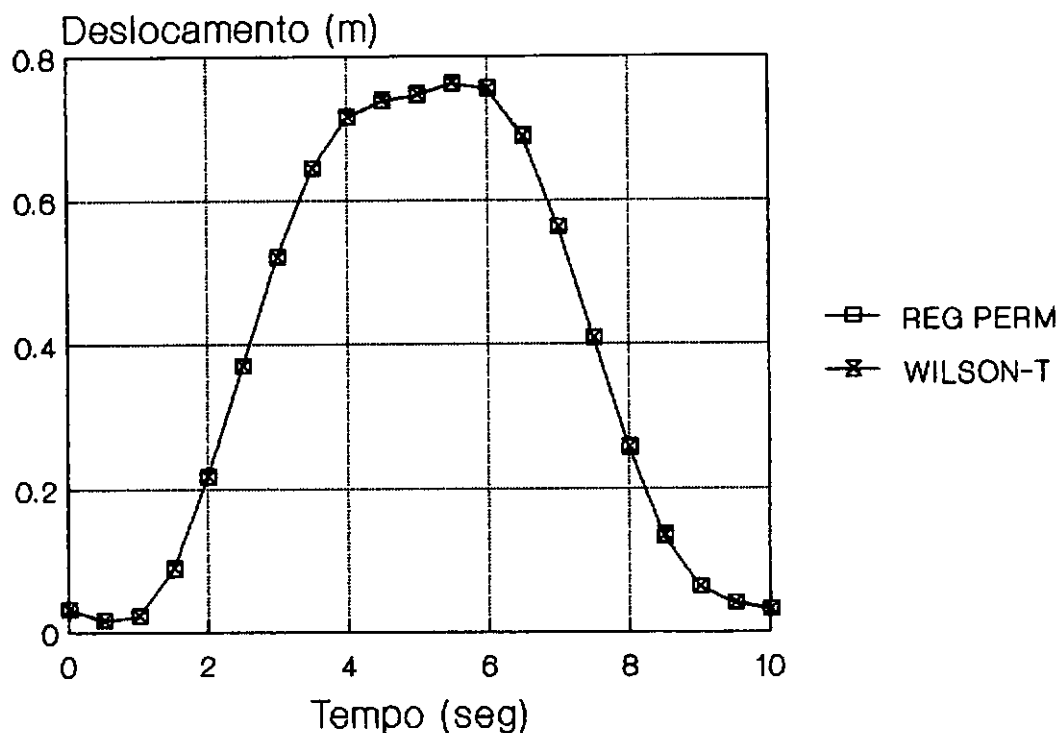


Figura VIII.5c Deslocamento X - Nó 1 (el +30000 mm)

Esforços Máximos em Regime Permanente

Elemento (Nó)	Esforços	WILSON-T	REG PERM	Dif. %
20 (42) perna	AX	0,287E5	0,287E5	-
	QY	0,689E1	0,687E1	-0,3 %
	QZ	0,246E4	0,246E4	-
	MX	0,787E2	0,789E2	0,2 %
	MY	0,160E5	0,161E5	0,6 %
	MZ	0,761E2	0,757E2	-0,5 %
50 (16) mesa	AX	0,785E3	0,794E3	1,2 %
	QY	0,119E1	0,120E1	0,8 %
	QZ	0,138E2	0,136E2	-1,4 %
	MX	0,259E0	0,246E0	-5,0 %
	MY	0,642E2	0,630E2	-1,9 %
	MZ	0,552E1	0,558E1	1,1 %
107 (13) diagonal	AX	0,590E4	0,590E4	-
	QY	0,340E0	0,344E0	1,2 %
	QZ	0,657E1	0,660E1	0,5 %
	MX	0,685E0	0,697E0	1,8 %
	MY	0,786E2	0,788E2	0,2 %
	MZ	0,445E1	0,451E1	1,3 %

Tabela VIII.5b

unidades : kN e kN.m

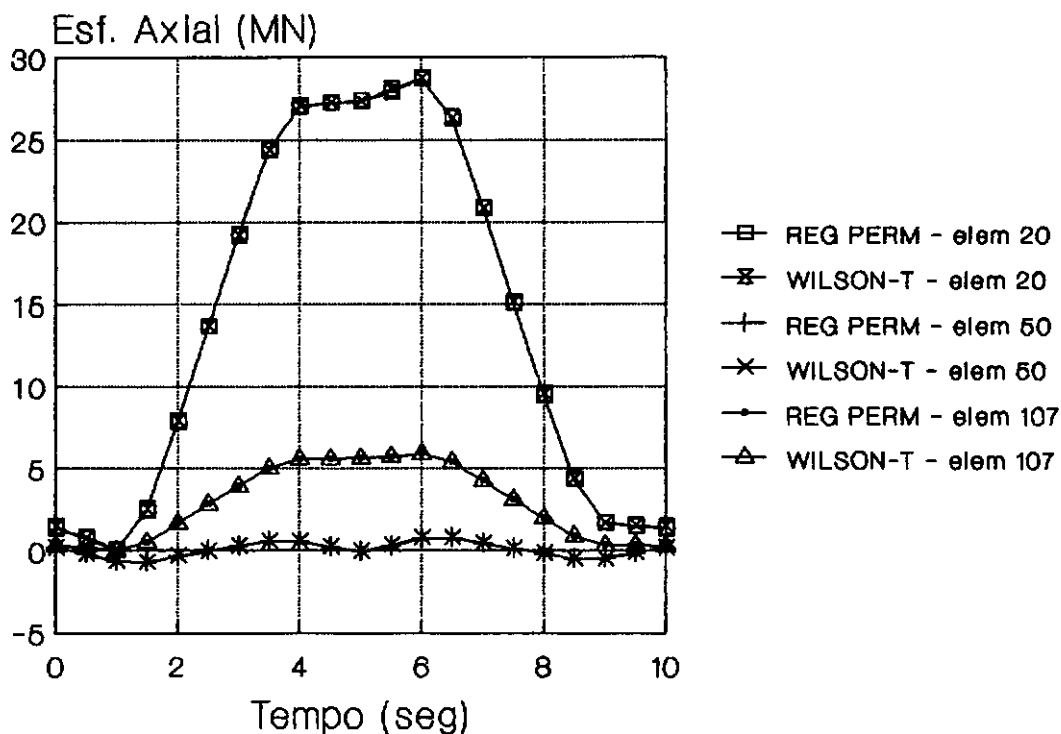


Figura VIII.5d Esforço axial para os elementos 20 (perna), 50 (mesa) e 107 (diagonal)

Comparação dos tempos de processamento (seg) :

Análise	WILSON-T	REG PERM
Geração da Base	-	78
Cálculo da Resposta	5921	115
Total	5921	193

Tabela VIII.5c



- *Comentários :*

Os resultados obtidos com a utilização do método de Ritz-Wilson acoplado à integração direta da resposta modal em regime permanente apresentam boa qualidade quando comparados com as respostas obtidas através da integração direta das equações de movimentos pelo método de Wilson- $\theta$  sem a aplicação da transformação modal.

Outra medida desta qualidade é o resíduo  $E_r(t)$ , definido no item III.6, que permaneceu nulo para todo o intervalo de integração.

A tabela VIII.5c apresentou os tempos de processamento gasto em cada uma das análises realizadas neste exemplo, que foram executadas em um micro-computador do tipo IBM PC-XT.

### VIII.6 Exemplo *JAQDEF*

Neste item são apresentados os resultados obtidos utilizando-se o método de Ritz-Wilson para a análise do modelo *JAQUETA* submetido a um carregamento senoidal defasado de  $45^\circ$  entre as faces da estrutura. A base de transformação, contendo os vetores de Ritz-Wilson, foi calculada para o instante de máximo cortante na base da jaqueta. Foi feita a análise de todo um ciclo de excitação utilizando-se apenas esta base e os resultados encontrados são comparados com os obtidos pela integração direta no domínio do tempo, pelo algoritmo de Wilson- $\theta$ , para o décimo ciclo de carga.

O objetivo principal deste exemplo, denominado *JAQDEF*, é avaliar a qualidade das respostas obtidas, tanto as de caráter global como as localizadas, em análises de carregamentos defasados com a utilização de apenas uma base de Ritz-Wilson. A performance dos índices indicadores dos resíduos no equilíbrio das equações de movimentos, conforme a definição feita no item III.6, também é avaliada.

As cargas nodais aplicadas na direção X da estrutura foram definidas pela seguinte expressão :

$$p(t) = F \cdot \text{sen} (2 \cdot \pi \cdot t / T + \phi)$$

onde as amplitudes  $F$  e as fase  $\psi$  são apresentadas na tabela VIII.6a e o período de excitação  $T$  é igual a 10 seg.

Elevação (mm)	Nós	Amplitudes $F$	Fases $\psi^\circ$
-12000	13	3750 kN	0°
	15	3750 kN	0°
	18	3750 kN	45°
	20	3750 kN	45°
-38000	21	2250 kN	0°
	23	2250 kN	0°
	26	2250 kN	45°
	28	2250 kN	45°
-64000	29	1000 kN	0°
	31	1000 kN	0°
	34	1000 kN	45°
	36	1000 kN	45°
-90000	37	500 kN	0°
	39	500 kN	0°
	42	500 kN	45°
	44	500 kN	45°

Tabela VIII.6a Amplitudes e fases das cargas

A base de Ritz-Wilson para a transformação de coordenadas foi gerada tendo como vetor de partida a carga atuante no instante  $t_g = 1,875$  seg e é formada por 7 vetores com as características mostradas na tabela VIII.6b.

Nesta análise foram empregados os mesmos dados referentes ao amortecimento e ao incremento de tempo das análises mostradas nos exemplos anteriores.

Vetor	Frequência (rad/seg)	Período (seg)	Fator
1	1,358	4,625	0,122
2	3,752	1,674	0,066
3	13,602	0,462	0,249
4	19,001	0,331	0,045
5	24,556	0,256	0,085
6	42,986	0,146	0,084
7	76,615	0,082	0,290
$\Sigma =$			0,939

Tabela VIII.6b Base de Ritz-Wilson

## - Resultados :

O gráfico mostrado na figura VIII.6a apresenta o resíduo  $Er(t)$  encontrado ao longo do período de integração, as funções  $g(t)$  aplicadas a cada face da jaqueta e o instante  $t_g$ , pertinente a geração da base de Ritz-Wilson.

## Deslocamentos Máximos em Regime Permanente

	Direção	WILSON-T	REG PERM	Dif. %
Nó 1	DX	0,9265	0,9244	0,2 %
	DZ	0,0064	0,0064	-

Tabela VIII.6c

unidade : m

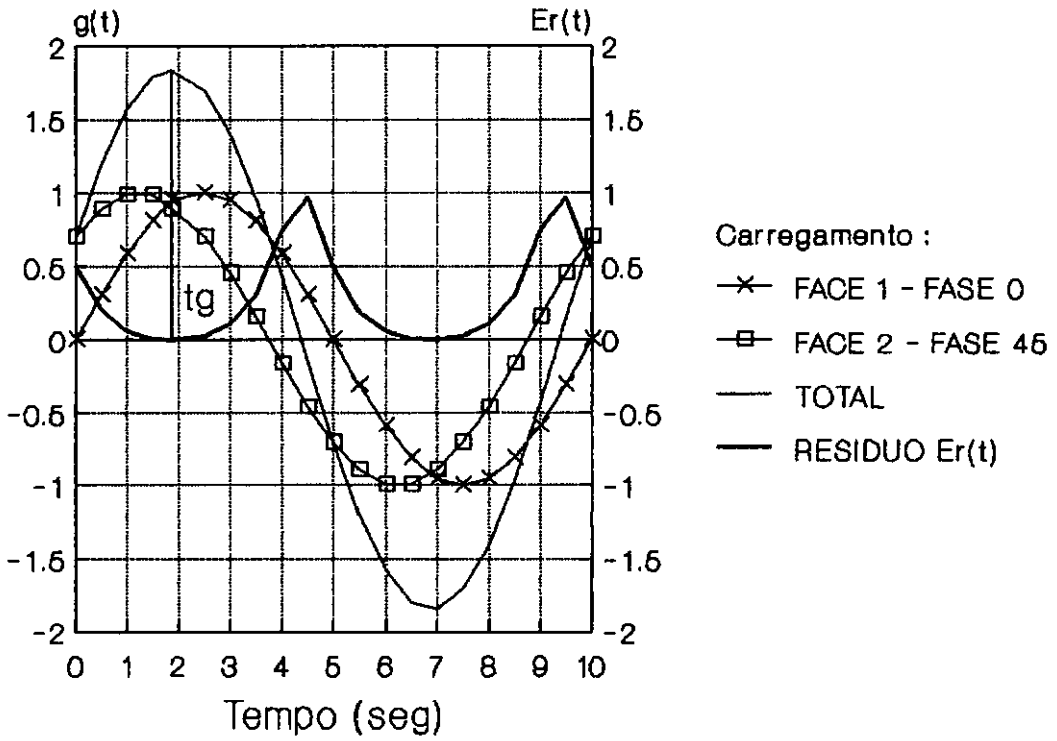


Figura VIII.6a Resíduo  $Er(t)$  e funções  $g(t)$  para cada face da jaqueta

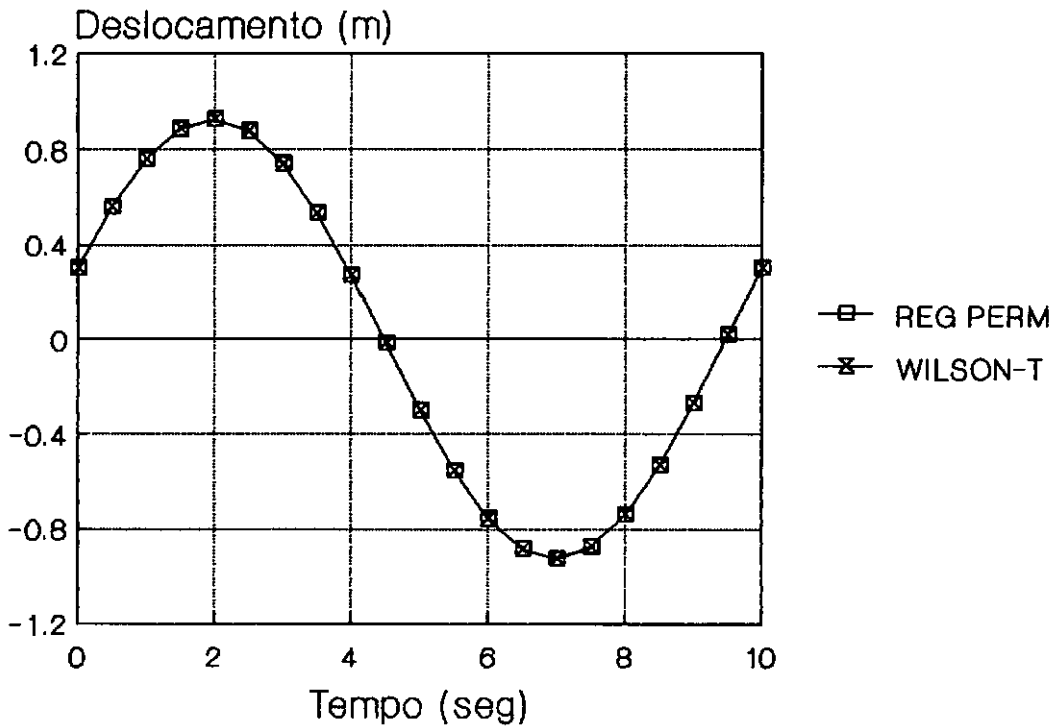


Figura VIII.6b Deslocamento X - Nô 1 (el +30000 mm)

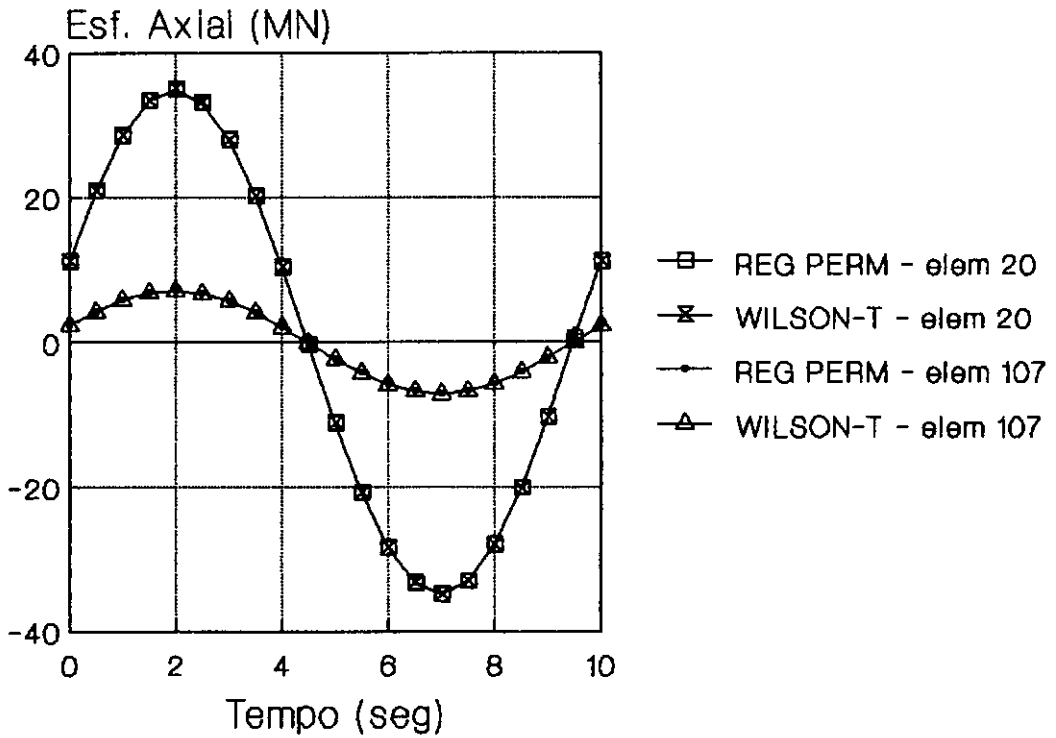


Figura VIII.6c Esforço axial para as barras 20 (perna) e 107 (diagonal)

Esforços Máximos em Regime Permanente

Elemento	Esforços	WILSON-T	REG PERM	Dif. %
(Nó)				
20 (42) perna	AX	0,350E5	0,349E5	-0,3 %
	QY	0,839E1	0,837E1	-0,2 %
	QZ	0,287E4	0,286E4	-0,3 %
	MX	0,912E2	0,909E2	-0,3 %
	MY	0,187E5	0,187E5	-
	MZ	0,926E2	0,923E2	-0,3 %
50 (16) mesa	AX	0,195E4	0,103E4	-47,2 % *
	QY	0,270E1	0,158E1	-41,5 % *
	QZ	0,173E2	0,172E2	-0,6 %
	MX	0,814E0	0,314E0	-61,4 % *
	MY	0,809E2	0,804E2	-0,6 %
	MZ	0,178E2	0,732E1	-58,9 % *
107 (13) diagonal	AX	0,714E4	0,712E4	-0,3 %
	QY	0,425E0	0,266E0	-37,4 % *
	QZ	0,713E1	0,702E1	-1,5 %
	MX	0,982E0	0,916E0	-6,7 %
	MY	0,710E2	0,677E2	-4,6 %
	MZ	0,573E1	0,214E1	-62,6 % *

Tabela VIII.6d

unidades : kN e kN.m

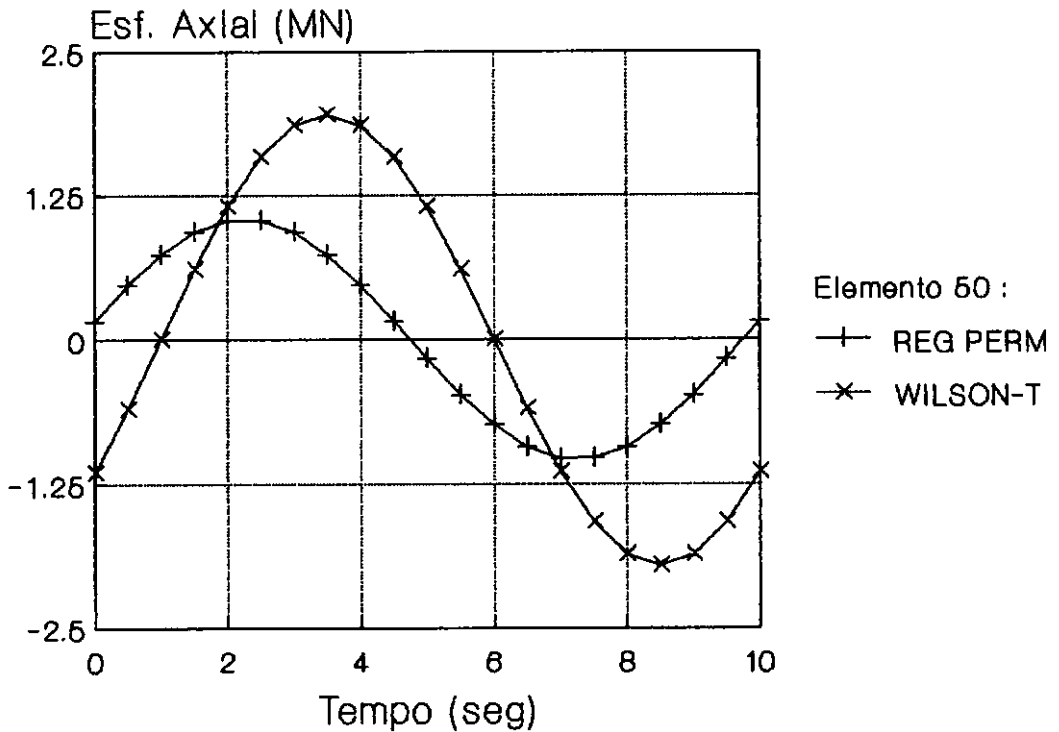


Figura VIII.6d Esforço axial - elemento 50 (mesa)

- *Comentários :*

Os resultados globais, tais como o deslocamento horizontal no convés ou os esforços nas pernas da jaqueta, obtidos com a utilização de uma única base de Ritz-Wilson, apresentam plena concordância com os encontrados na integração direta das equações de movimentos. Os resultados localizados, como os esforços nas mesas e alguns esforços nas diagonais, por outro lado, são completamente discordantes, conforme pode ser observado no gráfico apresentado na figura VIII.6d e nas linhas assinaladas na tabela VIII.6d.

O índice indicador da presença de resíduos no equilíbrio das equações de movimentos,  $Er(t)$ , apresentado na figura VIII.6a, consegue detectar a falta de qualidade da resposta obtida. Conforme foi anteriormente ressaltado no texto deste trabalho, este índice cresce a medida em que aumenta a diferença entre a distribuição espacial do carregamento imposto a cada instante à estrutura e aquela que ocorre no instante pertinente à geração da base de Ritz-Wilson.

Um fato interessante que deve ser observado no gráfico apresentado na figura VIII.6d é que nos instantes  $t_g = 2$  seg e  $t = 7$  seg, o primeiro de geração da base e o segundo correspondente a meio período de excitação após  $t_g$ , o esforço axial para a barra número 50 encontrado pelo método de Ritz-Wilson é próximo do valor correto calculado pelo algoritmo de Wilson- $\theta$ , em contraste com todo o restante do ciclo de excitação.

Este exemplo, portanto, mostra que o índice indicador de resíduo  $Er(t)$  pode ser utilizado para o monitoramento da qualidade da resposta obtida pelo método de Ritz-Wilson e que a precisão das respostas de caráter localizado pode ser comprometida com a utilização de apenas uma base nos casos de cargas defasadas.



### VIII.7 Exemplo *JAQMUD*

O objetivo deste quinto exemplo é a verificação da metodologia de mudança de base com a integração direta da resposta do regime permanente, proposta no Capítulo VI. Esta verificação será efetuada refazendo-se a análise realizada no exemplo *JAQSEN*, quando um carregamento senoidal não defasado foi imposto ao modelo *JAQUETA*. Nesta nova análise serão utilizadas duas bases de transformação.

O carregamento do exemplo *JAQSEN* é um carregamento bem comportado, que formalmente obedece a expressão (III.1) e que, portanto, não necessita da estratégia de mudança de base para a obtenção de uma boa resposta pelo método de Ritz-Wilson. Esta é a principal razão da utilização deste carregamento neste exemplo *JAQMUD*, pois assim será possível isolar qualquer falha ou problema pertinente ao procedimento de mudança de base, tendo por premissa que o procedimento em si não pode macular a qualidade da resposta, desde que as diferentes bases utilizadas consigam representar de forma adequada o problema dinâmico.

Todos os dados utilizados neste exemplo serão idênticos aos do *JAQSEN*, de forma que seja possível a comparação das respostas obtidas.

Serão utilizadas duas bases, denominadas [ $\Phi_6$ ] e [ $\Phi_7$ ]. A base [ $\Phi_7$ ], composta por sete vetores, é a mesma base utilizada no exemplo *JAQSEN*. A tabela VIII.7a resume as principais características das duas bases.

i. Base [ $\Phi_7$ ] :

Vetor	Frequência (rad/seg)	Período (seg)	Fator
1	1,358	4,625	0,122
2	3,752	1,674	0,066
3	13,602	0,462	0,249
4	19,001	0,331	0,045
5	24,556	0,256	0,085
6	42,986	0,146	0,084
7	76,615	0,082	0,290
$\Sigma =$			0,939

ii. Base [ $\Phi_6$ ] :

Vetor	Frequência (rad/seg)	Período (seg)	Fator
1	1,358	4,625	0,122
2	3,752	1,674	0,066
3	13,602	0,462	0,249
4	19,143	0,328	0,049
5	25,444	0,247	0,092
6	61,980	0,101	0,317
$\Sigma =$			0,894

Tabela VIII.7a Bases de Ritz-Wilson

A segunda base foi obtida forçando a parada do algoritmo de geração no sexto vetor e, portanto, descartando o critério de parada definido no item III.3. É interessante observar a igualdade entre os primeiros vetores nas duas bases e notar que apenas o sexto vetor apresenta diferença notável.

A tabela VIII.7b apresenta as faixas com os intervalos correlatos a cada base utilizada na solução do problema.

Faixas de tempo para cada base

Intervalo (seg)	Base
0,0 - 2,5	[ $\Phi_7$ ]
2,5 - 7,5	[ $\Phi_8$ ]
7,5 - 10,0	[ $\Phi_7$ ]

Tabela VIII.7b

- *Resultados :*

A comparação dos resultados obtidos é feita nas tabelas VIII.7c e VIII.7d com a utilização da seguinte legenda :

JAQSEN : Resposta obtida no exemplo *JAQSEN*.

JAQMUD : Resposta obtida com a utilização das bases [ $\Phi_7$ ] e [ $\Phi_8$ ].

## Deslocamentos Máximos em Regime Permanente

Direção		JAQMUD	JAQSEN	Dif. %
Nó 1	DX	0,99889	0,99889	-
	DZ	0,00693	0,00693	-

Tabela VIII.7c

unidade : m

## Esforços Máximos em Regime Permanente

Elemento	Esforços	JAQMUD	JAQSEN	Dif. %
(Nó)				
20 (42) perna	AX	0,377E5	0,377E5	-
	QY	0,904E1	0,904E1	-
	QZ	0,310E4	0,310E4	-
	MX	0,982E2	0,982E2	-
	MY	0,202E5	0,202E5	-
	MZ	0,997E2	0,997E2	-
50 (16) mesa	AX	0,113E4	0,113E4	-
	QY	0,169E1	0,169E1	-
	QZ	0,185E2	0,185E2	-
	MX	0,344E0	0,344E0	-
	MY	0,864E2	0,864E2	-
	MZ	0,787E1	0,787E1	-
107 (13) diagonal	AX	0,769E4	0,769E4	-
	QY	0,290E1	0,290E1	-
	QZ	0,760E1	0,760E1	-
	MX	0,100E1	0,100E1	-
	MY	0,736E2	0,736E2	-
	MZ	0,231E1	0,231E1	-

Tabela VIII.7d

unidades : kN e kN.m

- *Comentários :*

Os resultados apresentados mostram a acurácia do algoritmo de mudança de base. É importante salientar, a partir da observação das bases utilizadas na solução do problema, apresentadas na tabela VIII.7a, que a mudança de base efetivamente ocorreu sobre os vetores que nesta análise foram responsáveis pela parcela da resposta que teria sido calculada, no método da superposição modal clássica, pelo dispositivo da correção estática.

### VIII.8 Exemplo *MUDBAS*

O objetivo deste exemplo é a utilização das metodologias de mudança de base, apresentadas neste trabalho, na análise de sistemas estruturais submetidos a carregamentos defasados. O modelo *JAQUETA* será submetido ao mesmo carregamento definido no exemplo *JAQDEF*, apresentado anteriormente, e os resultados obtidos pelos dois procedimentos de mudança de base serão comparados com os fornecidos pela integração direta das equações de movimento pelo método de Wilson- $\theta$ . A comparação entre os resultados obtidos nas duas metodologias de mudança de base também será efetuada.

#### - Análise *MUDBAS* :

A primeira análise deste exemplo foi realizada com o procedimento de *Mudanca de Base*, apresentado no capítulo VI, no qual várias bases são utilizadas durante o período de integração e são efetuadas transferências das respostas modais entre os subespaços definidos por cada uma das bases, nos instantes de transição.

Quatro bases foram empregadas nesta primeira análise, todas compostas por 7 vetores de Ritz-Wilson. A base principal, denominada  $[\Phi_A]$ , foi gerada para o instante de cortante máximo na base da jaqueta. As outras três,

denominadas  $[\Phi_B]$ ,  $[\Phi_C]$  e  $[\Phi_D]$ , foram geradas com o procedimento de substituição do último vetor da base principal, apresentado no Algoritmo A4, da tabela VI.1, com o objetivo da representação da *correção estática* para o instante de geração de cada base.

As tabelas abaixo apresentam as características das bases empregadas nesta análise.

Instante de geração de cada base

Base	tg (seg)
$[\Phi_A]$	1,875
$[\Phi_B]$	4,375
$[\Phi_C]$	5,000
$[\Phi_D]$	3,500

Tabela VIII.8a

Vetores comuns a todas as bases :

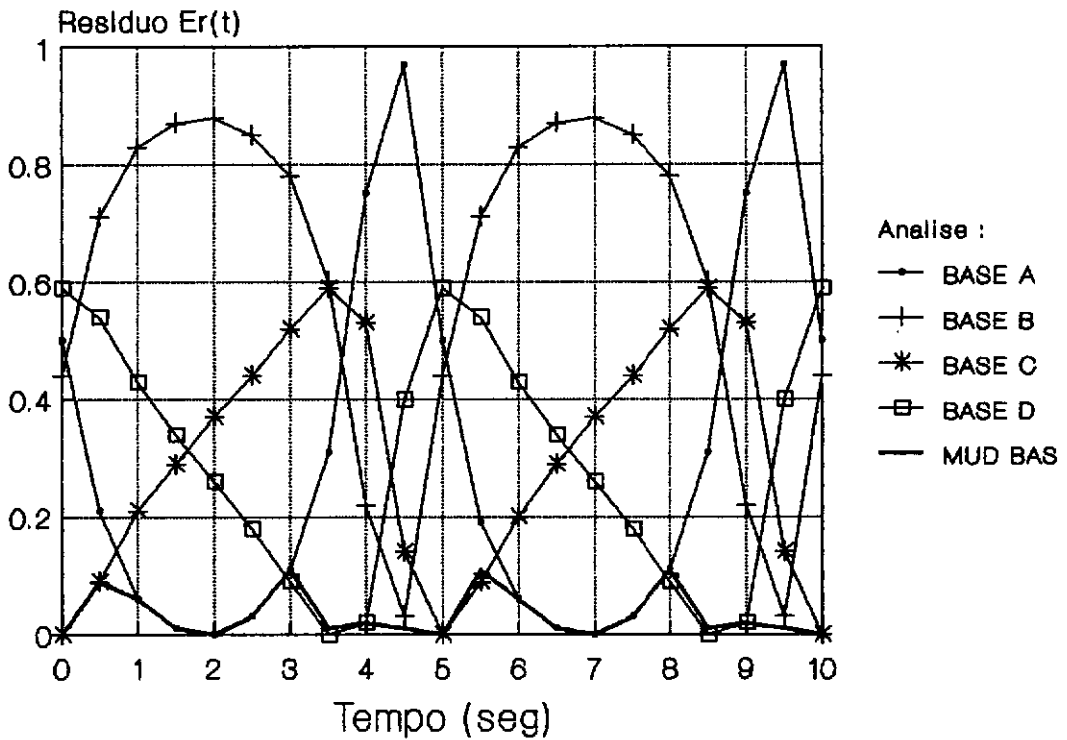
Vetor	Frequência (rad/seg)	Período (seg)
1	1,358	4,625
2	3,752	1,674
3	13,602	0,462
4	19,001	0,331
5	24,556	0,256
6	42,986	0,146

Tabela VIII.8b

Último vetor de cada base (vetor 7) :

Base	Frequência (rad/seg)	Período (seg)
$[\Phi_A]$	76,615	0,082
$[\Phi_B]$	55,338	0,114
$[\Phi_C]$	57,524	0,109
$[\Phi_D]$	59,591	0,105

Tabela VIII.8c

Figura VIII.8a Resíduos  $Er(t)$ 

O resíduo ao longo do tempo ocorrido nas análises feitas com a utilização independente de cada base e o pertinente à análise com o procedimento de mudança de base (MUD BAS) são apresentados no gráfico da figura VIII.8a. A tabela VIII.8d apresenta os intervalos de tempo para a utilização de cada base.

Intervalo (seg)	Base
0,0 - 0,5	$[\Phi_C]$
0,5 - 3,0	$[\Phi_A]$
3,0 - 4,0	$[\Phi_D]$
4,0 - 4,5	$[\Phi_B]$
4,5 - 5,5	$[\Phi_C]$
5,5 - 8,0	$[\Phi_A]$
8,0 - 9,0	$[\Phi_D]$
9,0 - 9,5	$[\Phi_B]$
9,5 - 10,0	$[\Phi_C]$

Tabela VIII.8d Faixas de tempo para cada base



- *Análise MODBAS :*

A segunda análise realizada deste exemplo empregou o procedimento de *Enriquecimento da Base* no qual é utilizada, para todo o tempo de análise, uma única base que sofre sucessivas modificações com a incorporação de novos vetores para a melhor representação da *correção estática* de todo o intervalo de integração.

A base inicial foi gerada para o instante de cortante máximo na base do modelo *JAQUETA* e é, portanto, idêntica a base  $[\Phi_A]$  utilizada na análise *MUDEBAS* deste exemplo. As características desta base são apresentadas nas tabelas VIII.8a, VIII.8b e VIII.8c.

A segunda base, formada por 8 vetores de Ritz-Wilson e denominada  $[\Phi_2]$ , foi gerada para o instante  $t = 4,375$  seg, que é o instante de máximo resíduo na resposta da análise com a utilização apenas da base inicial, conforme é mostrado no gráfico da Figura VIII.8a. A metodologia empregada na geração desta segunda base é a descrita no Algoritmo A5, da tabela VII.1.

O resíduo no equilíbrio das equações dinâmicas para a análise feita com a utilização da base  $[\Phi_2]$  foi praticamente nulo para todo o intervalo de integração, o que representa uma resposta de melhor qualidade do que a obtida com a utilização das quatro bases na análise

*MUDEBAS*, realizada com o procedimento de mudança de base do capítulo VI.

A tabela abaixo mostra as principais características das bases  $[\Phi_A]$  e  $[\Phi_2]$ :

Vetor	Base $[\Phi_A]$		Base $[\Phi_2]$	
	Frequência (rad/seg)	Período (seg)	Frequência (rad/seg)	Período (seg)
1	1,358	4,625	1,358	4,625
2	3,752	1,674	3,752	1,674
3	13,602	0,462	13,602	0,462
4	19,001	0,331	19,001	0,331
5	24,556	0,256	24,556	0,256
6	42,986	0,146	42,986	0,146
7	76,615	0,082	55,338	0,114
8	-	-	76,615	0,082

Tabela VIII.8e

#### - Resultados :

Os gráficos e as tabelas a seguir apresentam os resultados fornecidos pelas análises *MUDEBAS* e *MODEBAS* e fazem a comparação com os resultados obtidos pela integração direta das equações de movimento pelo método de Wilson- $\theta$ , sem transformação modal, que receberam o rótulo *WILSON-T*.

A título de ilustração, a tabela VIII.8f apresenta a comparação do tempo de processamento para cada análise realizada neste exemplo com a utilização de um micro-computador tipo IBM PC-XT. Deve ser observado que esta é uma comparação grosseira, haja visto que os métodos

empregados em cada análise poderiam ter sido implementados de forma computacional mais eficiente do que a aqui utilizada, pois este trabalho não tem como objetivo otimizar as implementações dos algoritmos apresentados.

Comparação dos tempos de processamento (seg) :

Análise	WILSON-T	MUDBAS	MODBAS
Geração das Bases	-	328	203
Cálculo da Resposta	5921	2269	592
Total	5921	2597	795

Tabela VIII.8f

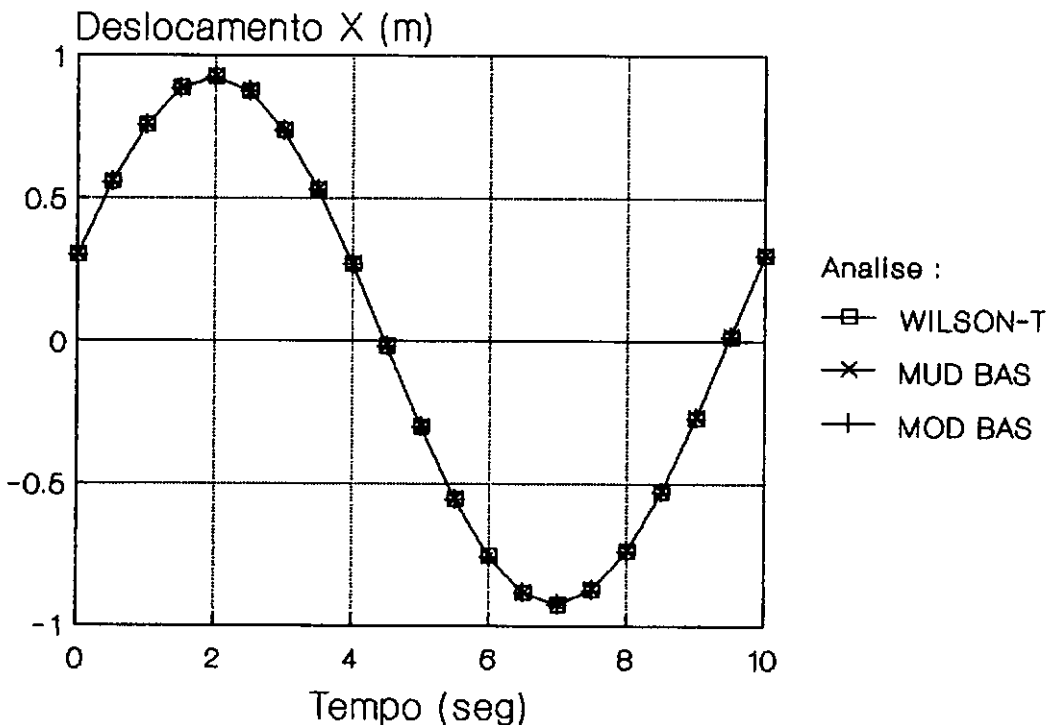


Figura VIII.8b Deslocamento X - Nó 1 (e1 +30000 mm)

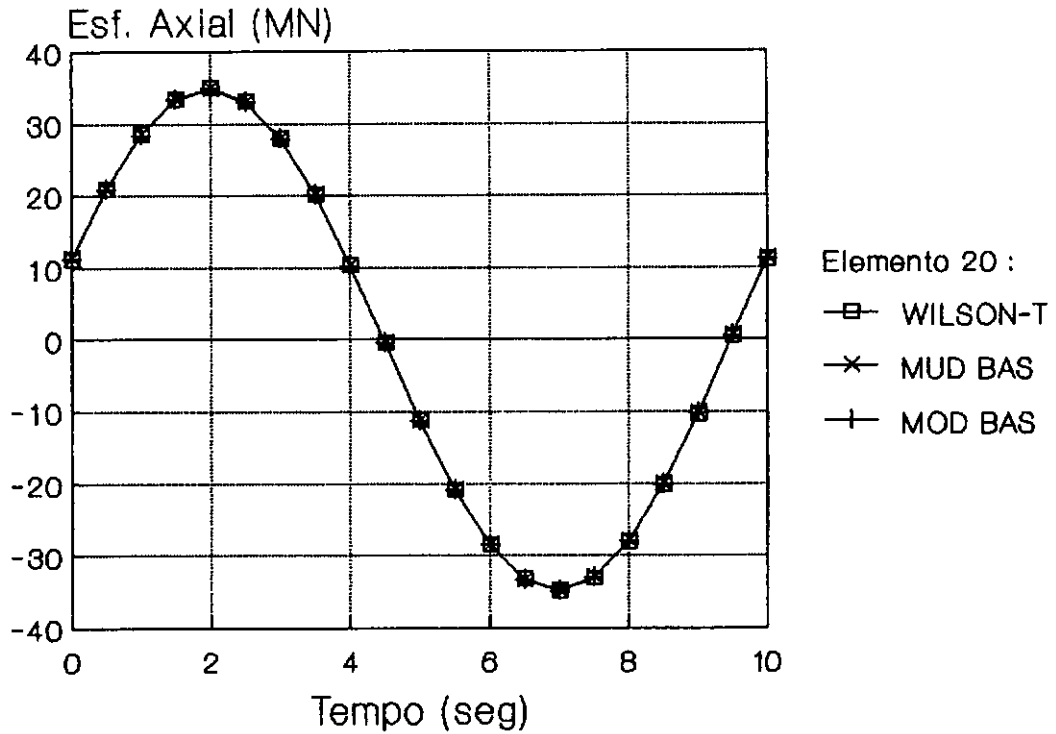


Figura VIII.8c Esforço Axial - Barra 20 (perna)

Deslocamentos Máximos em Regime Permanente

Direção		WILSON-T	MUDBAS	MODBAS
Nó 1	DX	0,9265	0,9244	0,9278
	DZ	0,0064	0,0064	0,0064

Tabela VIII.8g

unidade : m

## Esforços Máximos em Regime Permanente

Elemento	Esforços	WILSON-T	MUDBAS	MODBAS
(Nó)				
20 (42)  perna	AX	0,350E5	0,349E5	0,349E5
	QY	0,839E1	0,837E1	0,837E1
	QZ	0,287E4	0,286E4	0,286E4
	MX	0,912E2	0,909E2	0,911E2
	MY	0,187E5	0,187E5	0,187E5
	MZ	0,926E2	0,923E2	0,923E2
50 (16)  mesa	AX	0,195E4	0,233E4	0,194E4
	QY	0,270E1	0,336E1	0,268E1
	QZ	0,173E2	0,172E2	0,172E2
	MX	0,814E0	0,819E0	0,824E0
	MY	0,809E2	0,804E2	0,805E2
	MZ	0,178E2	0,212E2	0,177E2
107 (13)  diagonal	AX	0,714E4	0,712E4	0,712E4
	QY	0,425E0	0,422E0	0,424E0
	QZ	0,713E1	0,702E1	0,712E1
	MX	0,982E0	0,916E0	0,988E0
	MY	0,710E2	0,677E2	0,710E2
	MZ	0,573E1	0,666E1	0,574E1

Tabela VIII.8h

unidades : kN e kN.m

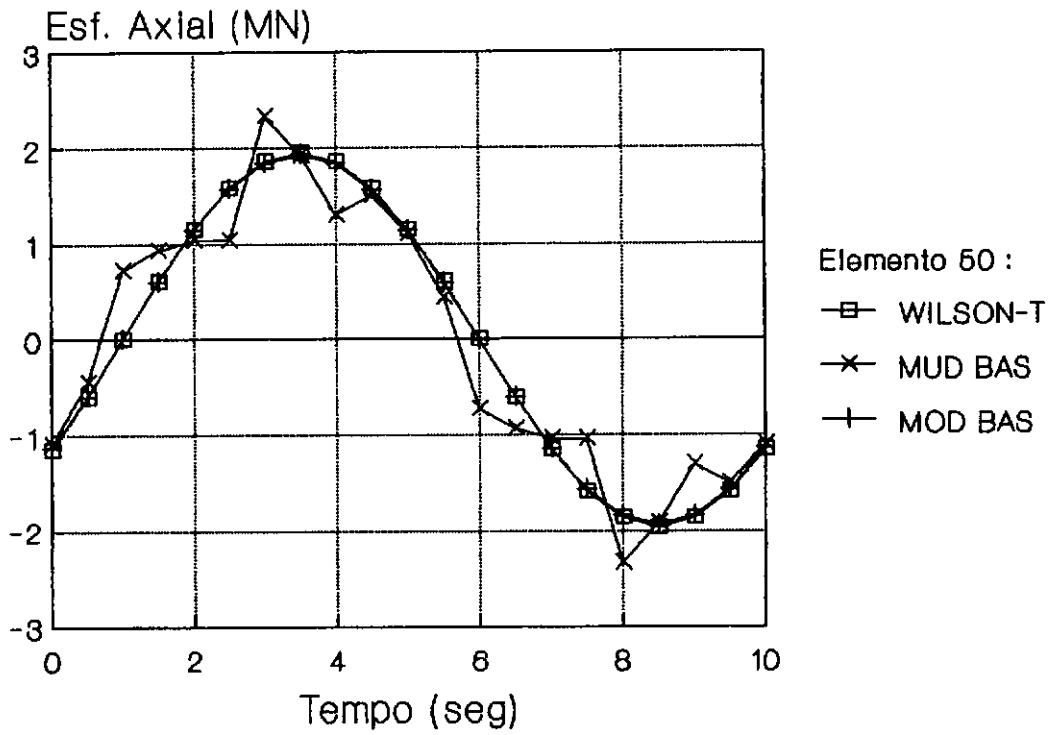


Figura VIII.8d Esforço Axial - Barra 50 (mesa)

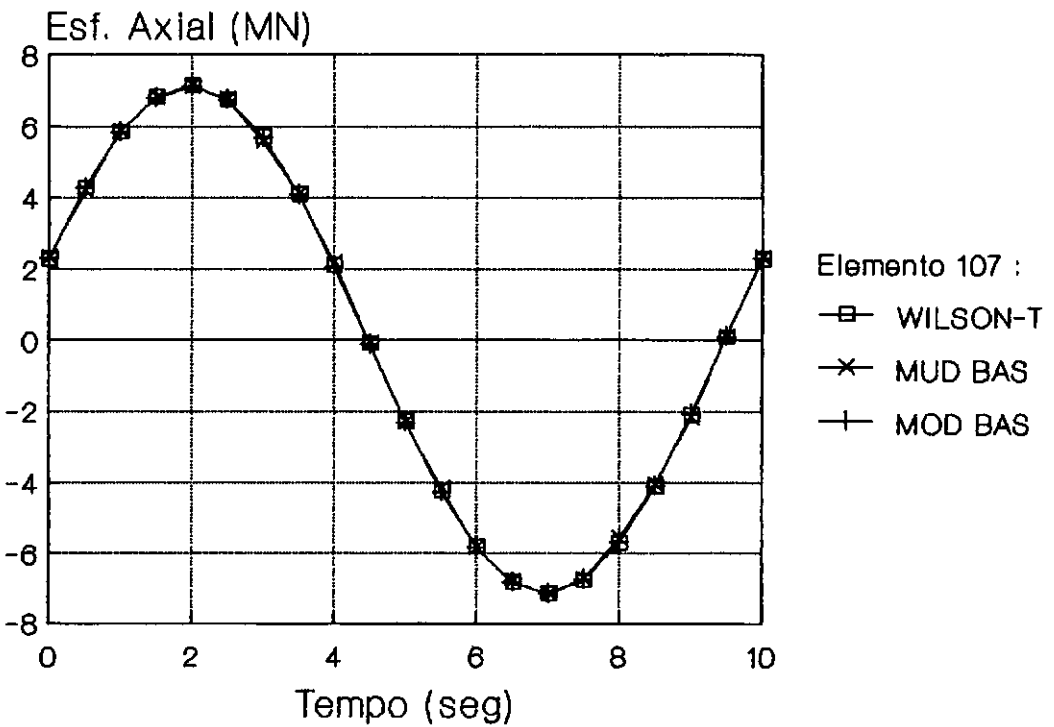
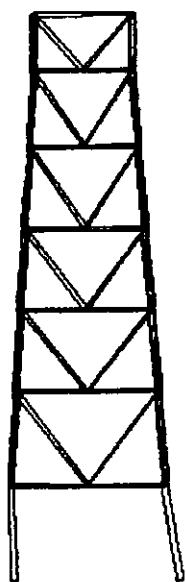
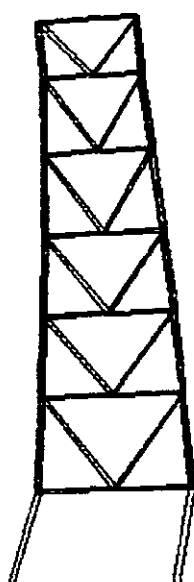


Figura VIII.8e Esforço Axial - Barra 107 (diagonal)

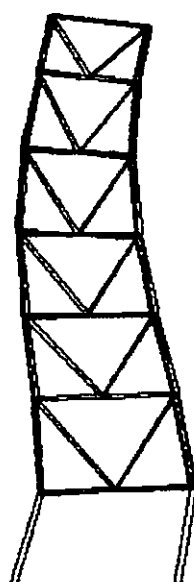
- Vetores de Ritz-Wilson utilizados :



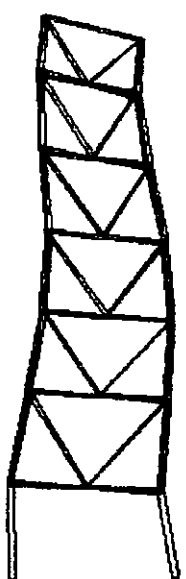
a.  $w = 1,358$



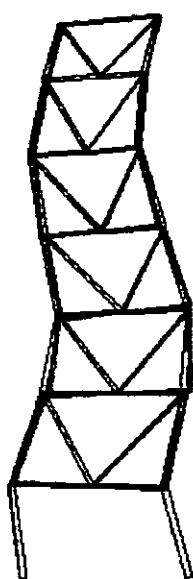
b.  $w = 3,752$



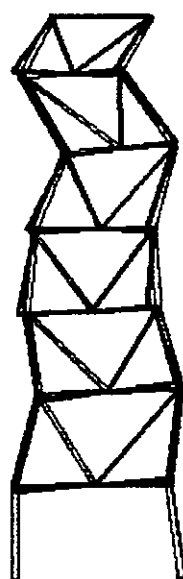
c.  $w = 13,602$



d.  $w = 19,001$



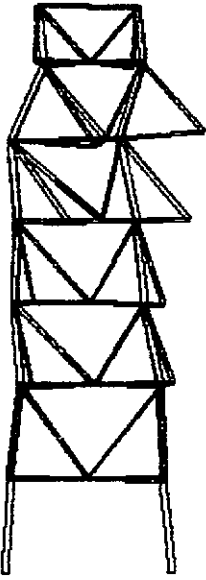
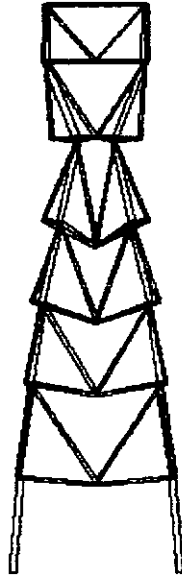
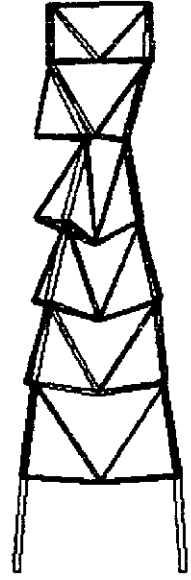
e.  $w = 24,556$



f.  $w = 42,986$

fig VIII.8f.i Vetores de Ritz-Wilson

Frequências  $w$  em rad/seg

g.  $w = 76,615$ h.  $w = 55,338$ i.  $w = 57,524$ j.  $w = 59,591$ 

*Legenda :*

- a. 1º vetor das bases utilizadas
- b. 2º vetor das bases utilizadas
- c. 3º vetor das bases utilizadas
- d. 4º vetor das bases utilizadas
- e. 5º vetor das bases utilizadas
- f. 6º vetor das bases utilizadas
- g. 7º vetor de  $[\Phi_A]$  e 8º de  $[\Phi_2]$
- h. 7º vetor de  $[\Phi_B]$  e de  $[\Phi_2]$
- i. 7º vetor de  $[\Phi_C]$
- j. 7º vetor de  $[\Phi_D]$

fig VIII.8f.ii Vetores de Ritz-Wilson

Frequências  $w$  em rad/seg



- *Comentários :*

O procedimento de *Enriquecimento da Base*, apresentado no capítulo VII e utilizado na análise *MODEBAS*, apresentou resultados plenamente satisfatórios tanto para os esforços de natureza global como para os esforços secundários, tais como os resultados para um elemento da perna (barra 20) e para uma das barras da mesa da elevação -12000 mm (barra 50), respectivamente. Ele mostrou-se, também, mais eficiente do que o procedimento do capítulo VI, tanto no aspecto de tempo de processamento gasto para a execução da análise como na qualidade das respostas obtidas.

A análise *MUDEBAS*, que foi executada com o procedimento do capítulo VI, mostra discordâncias para alguns resultados secundários quando comparados com os fornecidos pela integração direta. Deve ser ressaltado que estes resultados são superiores, em qualidade, aos apresentados com a utilização de apenas uma base de Ritz-Wilson, vide os resultados do exemplo *JAQDEF*.

O índice indicador de resíduo no equilíbrio das equações dinâmicas,  $Er(t)$ , mostrou-se uma ferramenta eficiente na avaliação da qualidade das respostas obtidas.

### VIII.9 Exemplo *MUDEBA2*

O objetivo deste exemplo é submeter o procedimento de *Enriquecimento da Base*, apresentado no capítulo VII, a um teste mais rigoroso. Com esta intenção o modelo *JAQUETA* será submetido a um carregamento que apresente maior grau de irregularidade do que o utilizado no exemplo anterior. Os resultados obtidos com a aplicação deste procedimento serão comparados com os obtidos pela integração direta das equações de movimento, utilizando o método de Wilson- $\theta$ , e com os obtidos com o emprego da base de Ritz-Wilson gerada a partir do carregamento atuante no instante de cortante máximo na base da jaqueta, sem a aplicação da metodologia de mudança de base.

- *Carregamento* :

As cargas nodais aplicadas na direção X foram definidas pela seguinte expressão :

$$p(t) = F \cdot g(t)$$

onde  $p(t)$  é a carga aplicada ao longo do tempo,  $F$  é a amplitude e  $g(t)$  é a função temporal.

A tabela VIII.9a apresenta as amplitudes  $F$ , as funções  $g(t)$  e as defasagens  $\phi$  empregadas na definição de cada carga nodal aplicada à estrutura, sendo que foram empregadas as seguintes funções de tempo :

G1 : Função dente de serra, com período de 10 seg, apresentada no gráfico da figura VII.5a.

G2 :  $g(t) = \sin (2.\pi.t/T + \phi)$  , com  $T = 10$  seg

G3 :  $g(t) = \sin (2.\pi.t/T + \phi)$  , com  $T = 5$  seg

Elevação (mm)	Nós	Amplitudes $F$	Função $g(t)$	Fases $\phi^\circ$
-12000	13	3750 kN	G2	0°
	15	3750 kN	G2	0°
	18	3750 kN	G2	45°
	20	3750 kN	G2	45°
-38000	21	2250 kN	G1	
	23	2250 kN	G1	
	26	2250 kN	G1	
	28	2250 kN	G1	
-64000	29	1000 kN	G3	0°
	31	1000 kN	G3	0°
	34	1000 kN	G3	45°
	36	1000 kN	G3	45°
-90000	37	500 kN	G2	0°
	39	500 kN	G2	0°
	42	500 kN	G2	45°
	44	500 kN	G2	45°

Tabela VIII.9a Amplitudes, Funções e Fases das Cargas

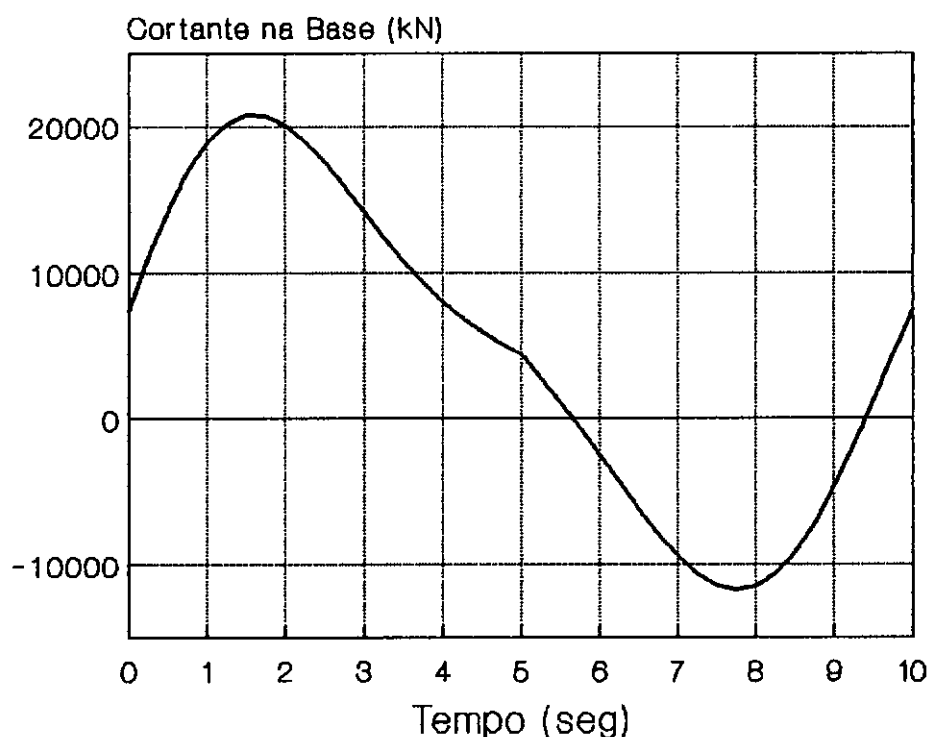


Figura VIII.9a Cortante na base da jaqueta

- Base de Ritz-Wilson :

A base inicial  $[\Phi_A]$  foi gerada para o instante de cortante máximo na base da jaqueta. O gráfico da figura VIII.9a apresenta a curva do cortante na base ao longo do tempo. As outras três bases,  $[\Phi_B]$ ,  $[\Phi_C]$  e  $[\Phi_D]$ , respectivamente, foram geradas utilizando o procedimento de *Enriquecimento da Base* apresentado no capítulo VII.

As tabelas abaixo apresentam as características principais de cada base e o gráfico apresentado na figura VIII.9b mostra o resíduo  $E_r(t)$  para cada base.

## Características das Bases:

Base	Nº de Vetores	tg (seg)
$[\Phi_A]$	10	1,500
$[\Phi_B]$	11	9,500
$[\Phi_C]$	12	4,000
$[\Phi_D]$	13	6,500

Tabela VIII.9b Número de vetores e instante de geração

Frequências (rad/seg) :

Vetor	Base $[\Phi_A]$	Base $[\Phi_B]$	Base $[\Phi_C]$	Base $[\Phi_D]$
1	1,358	1,358	1,358	1,358
2	2,096	2,096	2,093	2,073
3	3,752	3,752	3,752	3,752
4	4,924	4,924	4,923	4,921
5	5,556	5,556	5,552	5,537
6	6,523	6,522	6,519	6,495
7	13,600	13,600	13,600	13,598
8	18,105	18,088	17,910	16,056
9	25,092	25,071	24,822	21,584
10	54,805	52,610	38,825	26,450
11	-	56,936	56,555	38,844
12	-	-	57,656	57,516
13	-	-	-	58,649

Tabela VIII.9c Características das bases de Ritz-Wilson

Os valores das frequências do 1º, 3º e 7º vetores da base  $[\Phi_D]$  coincidem com as frequências dos três primeiros vetores da base utilizada no exemplo *JAQSEN*, apresentados na tabela VIII.4b e que foram considerados como aproximações aceitáveis de modos de vibração reais da estrutura nos comentários daquele exemplo. Este fato corrobora o critério apresentado no item III.6 para qualificação dos vetores de Ritz-Wilson como aproximações de autovetores reais de um sistema estrutural [11].

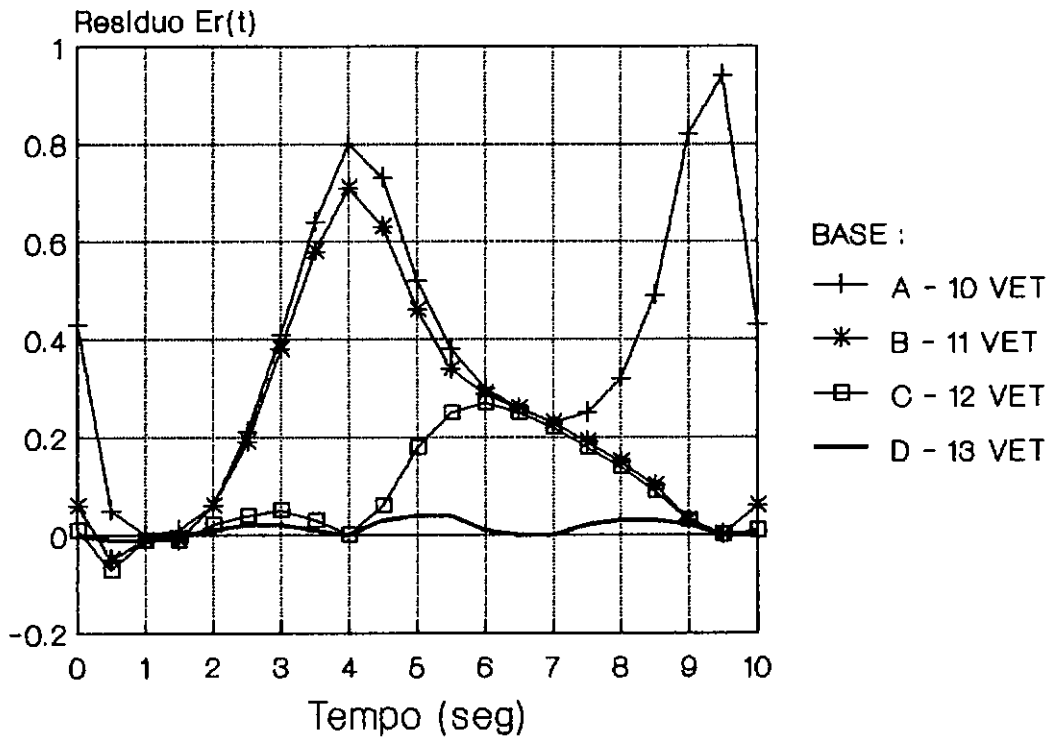


Figura VIII.9b Resíduos  $Er(t)$  para cada base

- *Resultados :*

Os gráficos e as tabelas a seguir apresentam os resultados obtidos nas análises feitas neste exemplo. A seguinte legenda é utilizada na identificação dos resultados :

- WILSON-T : Resultados obtidos com a integração direta das equações de movimento, utilizando o método de Wilson- $\theta$ .
- BASE A : Resultados obtidos utilizando-se a base  $[\Phi_A]$ .
- MOD BAS : Resultados obtidos utilizando-se a base  $[\Phi_D]$ , que foi gerada com o procedimento de *Enriquecimento da Base*.

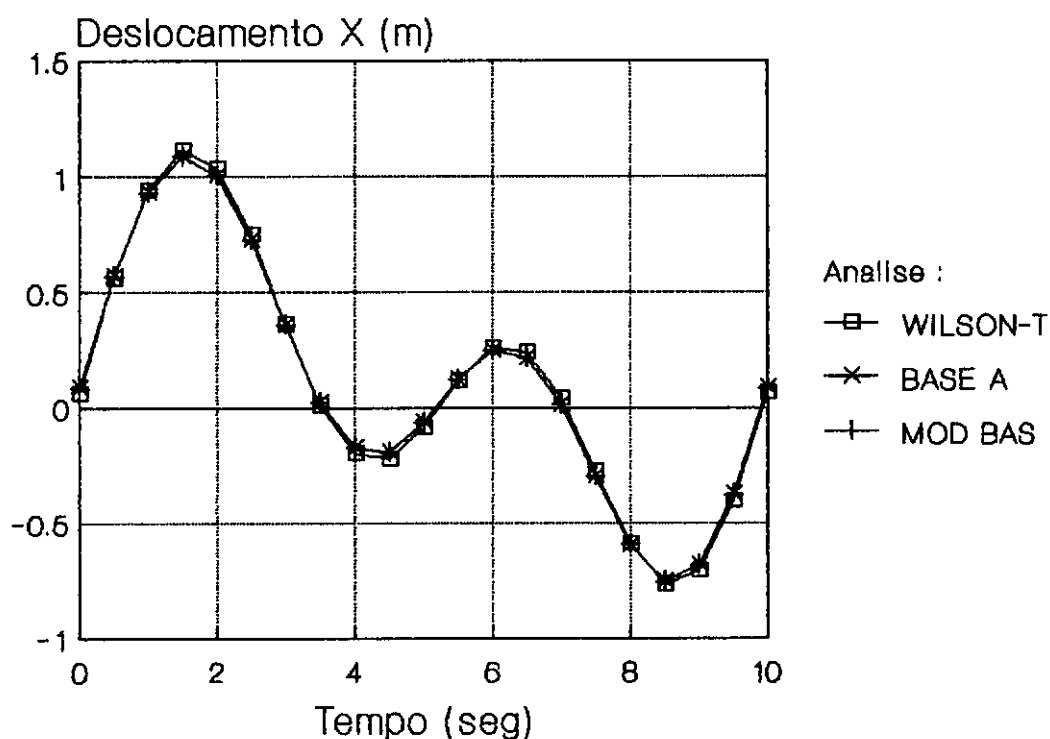


Figura VIII.9c Deslocamento X - Nó 1 (el 30000 mm)

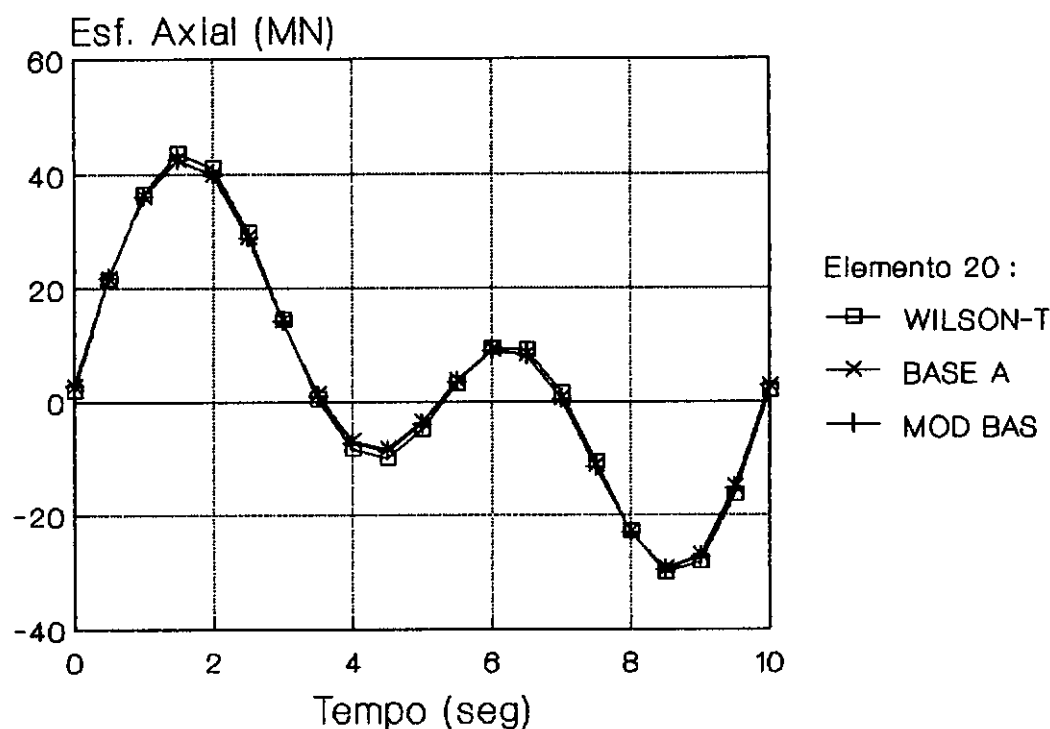


Figura VIII.9d Esforço Axial - Barra 20 (perna)

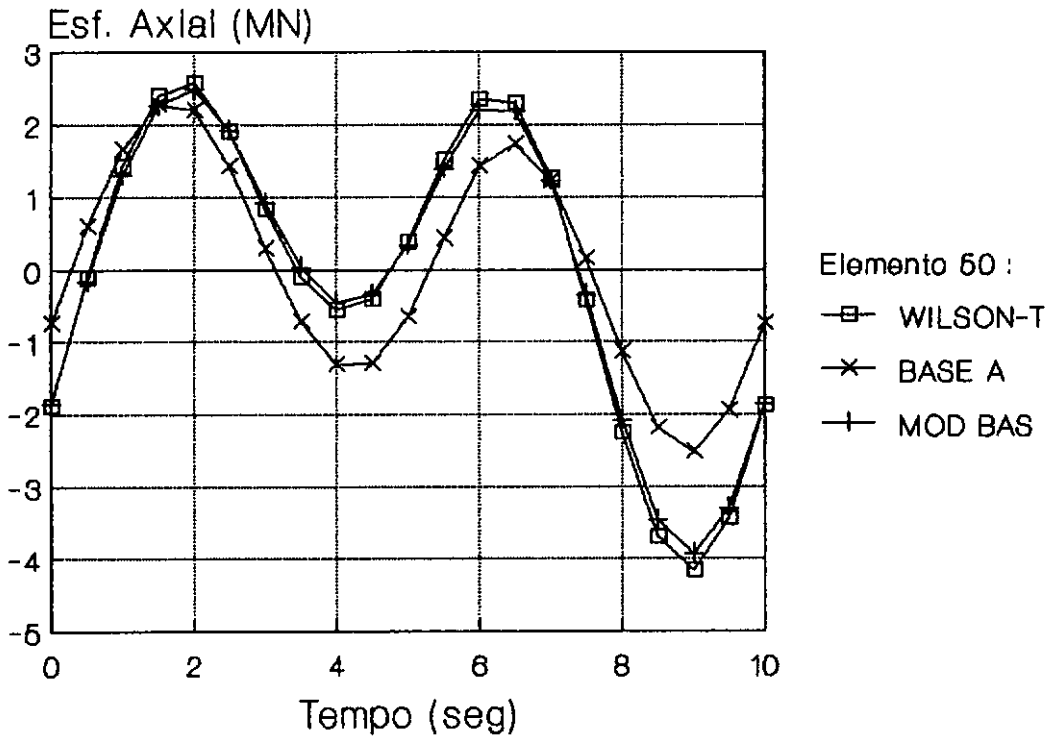


Figura VIII.9e Esforço Axial - Barra 50 (mesa)

Deslocamentos Máximos em Regime Permanente

Direção		WILSON-T	BASE A	MODEBAS
Nó 1	DX	1,1132	1,0872	1,0872
	DZ	0,0087	0,0081	0,0083

Tabela VIII.9d

unidade : m



## Esforços Máximos em Regime Permanente

Elemento	Esforços (Nó)	WILSON-T	BASE A	MODBAS
20 (42)  perna	AX	0,436E5	0,425E5	0,425E5
	QY	0,107E2	0,106E2	0,103E2
	QZ	0,319E4	0,313E4	0,313E4
	MX	0,986E2	0,960E2	0,966E2
	MY	0,209E5	0,205E5	0,205E5
	MZ	0,120E3	0,113E3	0,116E3
50 (16)  mesa	AX	0,416E4	0,252E4	0,393E4
	QY	0,496E1	0,979E1	0,572E1
	QZ	0,309E2	0,299E2	0,299E2
	MX	0,159E1	0,442E1	0,186E1
	MY	0,152E3	0,147E3	0,147E3
	MZ	0,287E2	0,860E2	0,377E2
107 (13)  diagonal	AX	0,990E4	0,968E4	0,968E4
	QY	0,407E0	0,137E1	0,499E0
	QZ	0,792E1	0,736E1	0,785E1
	MX	0,269E1	0,388E1	0,257E1
	MY	0,703E2	0,610E2	0,725E2
	MZ	0,806E1	0,271E2	0,892E1

Tabela VIII.9e

unidades : kN e kN.m

## - Comentários :

Os resultados obtidos pelo procedimento de *Enriquecimento da Base* representam aproximações de melhor qualidade do que os obtidos com a utilização da base gerada para o instante de cortante máximo, conforme pode ser observado nos gráficos e tabelas apresentados. Para os resultados decorrentes da configuração deformada global da estrutura as duas análises apresentaram resultados semelhantes e de boa qualidade.

## Capítulo IX

### CONCLUSÕES

A primeira conclusão deste trabalho é que a qualidade e a confiabilidade das respostas obtidas em análises dinâmicas com a utilização do método de Ritz-Wilson [1] podem ser asseguradas com o emprego do índice indicador de resíduo no equilíbrio das equações dinâmicas, denominado  $Er(t)$  e apresentado no item III.6.

A utilização conjunta do procedimento para integração direta da resposta em regime permanente, proposto por VELETOS e KUMAR [2], com a análise pela superposição modal de vetores de Ritz-Wilson [1], apresentou resultados plenamente satisfatórios e confiáveis, além de representar um grande ganho de eficiência em relação às técnicas tradicionais para a obtenção deste tipo de resposta, conforme demonstram as aplicações numéricas apresentadas neste trabalho.

Como foi observado ao final do Capítulo V, é aconselhável adicionar a correção proposta por VELETOS e KUMAR [2] à resposta transiente obtida para o segundo ciclo de excitação, no cálculo da resposta permanente. Com este cuidado evita-se a interferência de perturbações que possam ocorrer no cálculo da resposta transiente para os

primeiros passos de integração após o instante zero, quando o sistema estrutural está em repouso.

As metodologias de mudança e enriquecimento da base, apresentadas nos capítulos VI e VII, abrem perspectivas para a utilização da superposição de vetores de Ritz-Wilson na análise dinâmica de sistemas estruturais submetidos a cargas genéricas.

A primeira metodologia, denominada *Mudança de Base* e apresentada no capítulo VI, emprega várias bases no decorrer da análise no domínio do tempo, sendo que cada uma destas bases é gerada a partir das características do perfil espacial do carregamento atuante na sua faixa de atuação. Nos instantes de mudança de base são efetuadas projeções das respostas modais entre os subespaços definidos por cada base, através da utilização de matrizes de transformação das respostas modais.

A metodologia apresentada no capítulo VII, com a denominação de *Enriquecimento da Base*, utiliza em uma análise iterativa uma única base para todo o intervalo de integração da resposta dinâmica. Esta base sofre sucessivas modificações com a incorporação, em cada iteração, de um novo vetor de Ritz-Wilson, que será o responsável pelo enriquecimento da base na representação das características de forma do carregamento ao longo do período de análise.

O segundo procedimento mostrou-se superior ao primeiro na análise de estruturas sujeitas a carregamentos defasados, como os que ocorrem nas solicitações decorrentes da ação das ondas em estruturas marítimas. Esta superioridade ocorre tanto no aspecto do tempo de processamento gasto para a análise como também no aspecto da qualidade das respostas obtidas. Este procedimento também apresenta maior simplicidade para a sua implementação numérica e para a sua automatização, podendo ficar transparente para o usuário de uma aplicação computacional desta metodologia.

Outra vantagem do procedimento de *Enriquecimento da Base* é que metodologias desenvolvidas para a análise através da técnica de subestruturação [9 e 10] e para a solução de sistemas não lineares tratados pelo método das pseudo-forças [5] podem ser utilizadas sem dificuldades adicionais.

O procedimento do capítulo VI pode ter utilidade no tratamento de carregamentos que apresentem mudança de direção no período da análise. Aplicações deste tipo não foram testadas neste trabalho apesar de serem encontradas em problemas práticos.

A análise dinâmica de sistemas estruturais submetidos a carregamentos que apresentem pequenas defasagens pode ser tratada com a utilização de uma única base de Ritz-Wilson gerada para o perfil do carregamento atuante no instante

de carga máxima ou em outro instante característico qualquer da análise, sendo que a qualidade da resposta obtida deverá obrigatoriamente ser monitorada com a utilização do índice de resíduo  $Er(t)$ .

É sugerido o aprofundamento do estudo de algoritmos que permitam a geração de uma nova base de Ritz-Wilson tendo como partida uma base já existente, efetuando, desta forma, a incorporação das características de perfis de carga não contemplados na base original. Um aspecto que deve ser estudado com cuidado é a garantia da exclusão de vetores espúrios à análise na nova base. Estes algoritmos devem utilizar o procedimento para a identificação de quais vetores de Ritz-Wilson representam boa aproximação dos modos de vibração reais da estrutura e quais são os responsáveis pela resposta devida à *correção estática*, utilizando o procedimento apresentado por MARQUES [11] e descrito no item III.6.

Finalmente é sugerida, para trabalhos futuros, a utilização concomitante das metodologias apresentadas neste trabalho com as técnicas de subestruturação de grandes sistemas estruturais e da utilização do método das pseudo-forças na análise dinâmica de estruturas sujeitas a não-linearidades localizadas.

# REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- [1] WILSON EL, YUAN MW e DICKENS JM. "Dynamics Analysis by Direct Superposition of Ritz Vectors", *Earthquake Eng. Struct. Dyn.*, 10, pp 813-821 (1982).
  
- [2] VELETSOS A e KUMAR A. "Steady-State and Transient Response of Linear Structures", *Journal of Eng. Mechanics*, vol 109, num 5 (1983).
  
- [3] BATHE KJ. *Finite Element Procedures in Engineering Analysis*. Prentice-Hall, New Jersey (1982).
  
- [4] WILSON EL. "Numerical Methods for Dynamic Analysis", *Numerical Methods in Offshore Engineering* (ed. Zienkiewicz OC, Lewis RW, Stagg KG), pp 195-220. Wiley, New York (1978).
  
- [5] LIMA ECP, LANDAU L, EBECKEN NFF e ELLWANGER GB. "Nonlinear Dynamic Analysis of a Jacket-Type Platform by Ritz Mode Superposition Method", *Proc. 17th Annual Offshore Tech. Conference*, Houston, OTC 5030 (1985).

- [6] LIMA ECP, COUTINHO ALGA, LANDAU L e EBECKEN NFF. "A Utilização de Vetores de Lanczos-Ritz para a Transformação de Coordenadas em Análise Dinâmica de Estruturas", *Revista Brasileira de Engenharia*, vol 3, num 1, pp 48-68 (1985).
- [7] LÉGER P e WILSON EL. "Generation of Load Dependent Ritz Transformation Vectors in Structural Dynamics", *Eng. Comput.*, vol 4, pp 309-318 (1987).
- [8] COUTINHO ALGA, LANDAU L, LIMA ECP e EBECKEN NFF. "The Application of the Lanczos Mode Superposition Method in Dynamic Analysis of Offshore Structures", *Computers & Structures*, vol 25, num 4, pp 615-625 (1987).
- [9] WILSON EL e BAYO EP. "Use of Special Ritz Vectors in Dynamic Substructure Analysis", *Journal of Structural Engineering*, vol 112, num 8, pp 1944-1954 (1986).
- [10] GOMES CC. *A Utilização de Vetores de Lanczos-Ritz na Condensação Dinâmica de Estruturas*, Tese de M.Sc., COPPE/UFRJ (1988).

- [11] MARQUES OA. *Solução de Problemas de Autovalor Generalizados Através do Método de Iteração por Subespaços em Blocos e do Algoritmo de Lanczos com Ortogonalização Sucessiva*, Tese de M.Sc., COPPE/UFRJ (1986).
- [12] SIMON HD. "The Lanczos Algorithm with Partial Reorthogonalization", *Math. of Computations*, vol 42, num 165, pp 115-142 (1984).
- [13] NOUR-OMID B e CLOUGH RW. "Dynamic Analysis of Structures Using Lanczos Coordinates", *J. Earthquake Eng. Struct. Dynam.*, vol 12, pp 565-577 (1984).
- [14] LIMA ECP, COUTINHO ALGA, ALVES JLD, LANDAU L e EBECKEN NFF "Direct Integration of the Steady-State Solution in Time Domain", *Proc. of the 6th Intern. Symposium on Offshore Engineering*, pp 463-473, Rio de Janeiro (1987).
- [15] FERREIRA CB, CASAPRIMA EG e VIDEIRO PM. *Sistema para Análise Estrutural "SAECHIP"*, trabalho apresentado na cadeira de Técnicas Computacionais, COPPE, Rio de Janeiro (1985).
- [16] PAZ M. *Structural Dynamics, Theory and Computation*, p 80. Van Nostrand Reynhold, New York (1980).



- [17] BATHE KJ, WILSON EL e PETERSON. *SAP IV - A Structural Analysis Program for Static and Dynamic Response of Linear System*. Manual do usuário, p 33 (1974).